ANALES

DE LA

SOCIEDAD CIENTIFICA

ARGENTINA

IMPERIAL MYCOLOGICAL INSTITUTE
23 DE 1943

DIRECTOR: EMILIO REBUELTO

NOVIEMBRE 1942 — ENTREGA V — TOMO CXXXIV

SUMARIO

Pág.

C. E. DIEULEFAIT. — Sobre la ley sinusoidal límite de Slutzky, derivada de una nueva sucesión de valores probables 257

EMILIO L. DÍAZ. — Un periodograma de las lluvias en Córdoba..... 286

RAMÓN H. LEIGUARDA. — Investigación de bacterias coliformes en el agua. Modificaciones al medio de Mac Conkey 293

A. L. DE FINA. — Bibliografía 303

BUENOS AIRES
CALLE SANTA FE 1145
—
1942

SOCIEDAD CIENTIFICA ARGENTINA

SOCIOS HONORARIOS

Dr. Pedro Visca †
Dr. Mario Isola †
Dr. Germán Burmeister †
Dr. Benjamín A. Gould †
Dr. R. A. Phillippi †
Dr. Guillermo Rawson †
Dr. Carlos Berg †
Dr. Valentín Balbín †
Dr. Florentino Ameghino †

Dr. Carlos Darwin †
Dr. César Lombroso †
Ing. Luis A. Huergo †
Ing. Vicente Castro †
Dr. Juan J. J. Kyle †
Dr. Estanislao S. Zeballos †
Ing. Santiago E. Barabino †
Dr. Carlos Spegazzini †
Dr. J. Mendizábal Tamborel †

Dr. Walter Nernst †
Dr. Alberto Einstein
Dr. Cristóbal M. Hicken †
Dr. Angel Gallardo †
Dr. Eduardo L. Holmberg †
Ing. Guillermo Marconi †
Ing. Eduardo Huergo †
Dr. Enrique Ferri †

CONSEJO CIENTIFICO

Ing. Félix Aguilar; Ing. José Babini; Dr. Horacio Damianovich; Prof. Carlos E. Dieulefait; Dr. Juan A. Domínguez; Dr. Gustavo A. Fester; Dr. Joaquín Frenguelli; Dr. Josué Gollan (h.); Dr. Bernardo A. Houssay; Dr. Cristofredo Jakob; Dr. Ramón G. Loyarte; Dr. Emiliano J. Mac Donagh; Dr. R. Armando Marotta; Dr. Julio Méndez; Ing. Agr. Lorenzo R. Parodi; Dr. Franco Pastore; Capitán de fragata Héctor R. Ratto; Vicealmirante Segundo R. Storni; Dr. Alfredo Sordelli; Dr. Reinaldo Vanossi; Dr. Enrique V. Zappi.

JUNTA DIRECTIVA

(1942-1943)

Presidente	Ingeniero **Jorge W. Dobranich**
Vicepresidente 1°	Ingeniero **Enrique Chanourdie**
Vicepresidente 2°	Ingeniero **Julio R. Castiñeiras**
Secretario de actas	Profesor **José F. Molfino**
Secretario de correspondencia.	Ingeniero **José S. Gandolfo**
Tesorero	Ingeniero **Edmundo Parodi**
Bibliotecario	Doctor **Reinaldo Vanossi**
Vocales	Ingeniero **Antonio Escudero** Doctor **Raúl Wernicke** Ingeniero **Juan B. Marchionatto** Ingeniero **Carlos M. Gadda** Doctor **José Llauró** Doctor **Juan C. Vignaux** Ingeniero **Alfredo G. Galmarini** Ingeniero **Carlos A. Lizer y Trelles**
Suplentes	Ingeniero **Gastón Wunenburger** Ingeniero **Belisario Alvarez de Toledo** Ingeniero **Raúl Buich** Ingeniero **Héctor Ceppi.** Doctor **E. Eduardo Krapf**
Revisores de balances anuales	Doctor **Antonio Casacuberta** Arquitecto **Carlos E. Géneau**

ADVERTENCIA. — Los colaboradores de los Anales son personalmente responsables de la tesis sustentada en sus escritos. Tienen derecho a la corrección de dos pruebas. Los que deseen tirada aparte de 50 ejemplares de sus artículos, deben solicitarla por escrito. Artº 10 del Reglamento de los "ANALES" (modificado por la J. D. en su sesión de fecha 4 de septiembre 1941). Los escritos originales destinados a la Dirección de los "Anales", serán remitidos a la Administración de la Sociedad, calle Santa Fe 1145, a los efectos de registrar la fecha de entrega para luego enviarlos al señor Director. La Sociedad no tomará en consideración las observaciones de los autores que se refieran a cualquier anormalidad, si no se ha cumplido con el requisito indicado.

Impreso en los Talleres Gráficos "TOMAS PALUMBO" - La Madrid 321-325 - Buenos Aires

SOBRE LA LEY SINUSOIDAL LIMITE DE SLUTZKY, DERIVADA DE UNA NUEVA SUCESION DE VALORES PROBABLES

POR

C. E. DIEULEFAIT

1. — Partiendo de una sucesión de variables probables $\{ x_j \} = x_1, x_2, x_3, \ldots$ y siendo E la indicatriz de la esperanza matemática, el Sr. E. Slutzky, a quien se debe el fundamental descubrimiento de la ley sinusoidal límite (1), supuso que se verificaban las condiciones:

$$E(x_j) = 0 \quad E(x_j^2) = \sigma_x^2 = \text{constante}, \; E(x_j x_k) = 0, \; j \neq k \qquad [I]$$

Formando entonces las series consecuencias $\{x_j^{(1)}\}$, $\{x_j^{(2)}\}, \ldots$

$$x_j^{(n)} = x_j^{(n-1)} + x_{j-1}^{(n-1)}$$

Slutzky demostró que la sucesión $\Delta^m x_j^{(n)}$ tiende a disponerse con $n, m \longrightarrow \infty$ y con una probabilidad tendiente a la unidad, sobre una sinusoide de período determinado.

Posteriormente, el Sr. V. Romanovsky (2) demostró que la consecuencia anterior se mantenía si, en lugar de construir las sucesiones consecuencias por medio de sumas móviles de orden igual a dos se consideraba un orden cualquiera $s \geq 2$ o sea si

$$x_j^{(n)} = x_j^{(n-1)} + x_{j-1}^{(n-1)} + \ldots + x_{j-(s-1)}^{(n-1)}$$

Después de esta ampliación, el mismo Romanovsky (3) demostró que el Teorema podía generalizarse partiendo de una sucesión básica que cumpliera las siguientes condiciones:

$$E(x_j) = 0 \quad E(x_j^2) = \sigma_x^2 = \text{constante},$$
$$E(x_j x_{j \pm t}) = \sigma_x^2 f(t), \; f(t) = f(-t) \qquad [II]$$

y suponiendo ciertas condiciones de atenuación en los coeficientes de autocorrelación $f(t)$.

Las condiciones [II] con haber modificado la estructura de las sucesiones sujetas a las condiciones [I] dan una esperanza matemática para el producto de dos variables que está solamente caracterizada por la distancia que las separa. Deseoso de superar este carácter estacionario y de lograr que aquellas esperanzas matemáticas tradujesen el rango, o si se quiere la historia de las variables y en modo que la proposición de Slutzky pudiese mantenerse para estas variables sin necesidad de pasar a una escala reducida de las mismas, consideré una sucesión (a cuyo estudio dedico este trabajo) sometida a las siguientes condiciones:

$$E(x_j) = 0 \quad E(x_j^2) = A^2 e^{2\alpha j} \quad E(x_j x_{j+t}) = A^2 e^{\alpha (2j+t)} f(t); f(t) = f(-t) \qquad [III]$$

con A y α números reales y positivos y ciertas condiciones de atenuación para los coeficientes de autocorrelación. Se ve de inmediato que las condiciones [III] contienen a las anteriores, dando para $\alpha = 0; f(t) = 0$, $t \neq 0$, el caso de Slutzky.

2. — Siendo

$$x_j^{(n)} = x_j^{(n-1)} + x_{j-1}^{(n-1)} + \ldots + x_{j-(s-1)}^{(n-1)}$$

los valores $x_j^{(n)}$ se pueden deducir también, diretamente de la sucesión básica.

Como para la primera sucesión consecuencia se tiene:

$$\begin{aligned} x_j^{(1)} &= x_j + x_{j-1} + \ldots + x_{j-(s-1)} \\ x_{j-1}^{(1)} &= x_{j-1} + x_{j-2} + \ldots + x_{j-1-(s-1)} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{j-(s-1)}^{(1)} &= x_{j-(s-1)} + \ldots + x_{j-2(s-1)} \end{aligned}$$

y para la segunda sucesión $x_j^{(2)} = x_j^{(1)} + x_{j-1}^{(1)} + \ldots + x_{j-(s-1)}^{(1)}$ resulta:

$$x_j^{(2)} = x_j + 2x_{j-1} + 3x_{j-2} + \ldots + 3x_{j-2(s-1)+2} + 2x_{j-2(s-1)+1} + x_{j-2(s-1)}$$

Los coeficientes sucesivos 1, 2, 3,... 3, 2, 1 son los que se obtienen efectuando el desarrollo

$$(1 + x + x^2 + \ldots + x^{s-1})^2 = (1 - x^s)^2(1 - x)^{-2} = \sum_{v=0}^{2(s-1)} R_v^{(2)} x^v$$

de modo que entonces

$$x_j^{(2)} = \sum_{v=0}^{2(s-1)} R_v^{(2)} x_{j-v}$$

y análogamente

$$x_j^{(1)} = \sum_{v=0}^{s-1} R_v^{(1)} x_{j-v}$$

Como es

$$x_j^{(3)} = x_j^{(2)} + x_{j-1}^{(2)} + \ldots + x_{j-(s-1)}^{(2)}$$

resultará

$$x_j^{(3)} = \sum_{v=0}^{2(s-1)} R_v^{(2)} x_{j-v} + \sum_{v=0}^{2(s-1)} R_v^{(2)} x_{j-1-v} + \ldots + \sum_{v=0}^{2(s-1)} R_v^{(2)} x_{j-(s-1)-v}$$

o sea

$$x_j^{(3)} = \sum_{v=0}^{2(s-1)} R_v^{(2)} x_{j-v}^{(1)} = \sum_{v=0}^{2(s-1)} R_v^{(2)} \sum_{v_1=0}^{s-1} R_{v_1}^{(1)} x_{j-v-v_1} =$$

$$= \sum_{t=0}^{3(s-1)} x_{j-t} \sum_{v=0}^{2(s-1)} R_v^{(2)} R_{t-v}^{(1)}$$

y como también

$$(1 - x^s)^3 (1 - x)^{-3} = \left(\sum_{v=0}^{2(s-1)} R_v^{(2)} x^v \right) \left(\sum_{v=0}^{s-1} R_v^{(1)} x^v \right) =$$

$$= \sum_{t=0}^{3(s-1)} x^t \sum_{v=0}^{2(s-1)} R_v^{(2)} R_{t-v}^{(1)}$$

se deduce que

$$x_j^{(3)} = \sum_{v=0}^{3(s-1)} R_v^{(3)} x_{j-v}$$

El mismo proceso, ya suficientemente indicado, permite, por inducción completa, concluir que:

$$x_j^{(n)} = \sum_{v=0}^{n(s-1)} R_v^{(n)} \, x_{j-v}$$

estando los coeficientes $R_v^{(n)}$ determinados, por la identidad:

$$(1 + x + \ldots + x^{s-1})^n = (1 - x^s)^n \, (1 - x)^{-n} = \sum_{v=0}^{n(s-1)} R_v^{(n)} \, x^v$$

Se deduce entonces para los coeficientes $R_v^{(n)}$ la siguiente expresión:

$$R_v^{(n)} = \frac{1}{v!} \left[\frac{d^v \, (1 - x^s)^n \, (1 - x)^{-n}}{dx^v} \right]_{x=0} =$$

$$= \frac{1}{2 \pi i} \int_\gamma \frac{(1 - z)^n \, (1 - z)^{-n}}{z^{v+1}} \, dz \qquad [1]$$

en la que γ es un camino cerrado que incluye el punto $z = 0$.

3. — Procedamos a estudiar el coeficiente de correlación entre un $x_j^{(n)}$ y $x_{j+t}^{(n)}$. Para ello, haciendo $y_j = x_j^{(n)}$ introduzcamos la función

$$\Phi \, (\xi, \eta) = \int e^{\xi y_j + \eta y_{j+t}} \, dF \, (x_1, x_2, x_3, \ldots)$$

en la que $F \, (x_1, x_2, \ldots)$ es la función de probabilidad total correspondiente al conjunto de las variables que forman la sucesión básica. Como en un y_j figuran las variables desde x_j, hasta $x_{j-n(s-1)}$ y en y_{j+t} desde x_{j+t} hasta $x_{j+t-n(s-1)}$ construyo la función característica

$$\varphi \, (u_0, u_1, \ldots \, u_{t+\lambda}) = \int e^{u_0 x_{j+t} + u_1 x_{j+t-1} + \ldots + w_{t+\lambda} x_{j-\lambda}} \, dF$$

habiendo puesto, para mayor simplicidad: $\lambda = n \, (s - 1)$.

Si indico con $T_2 \, (\varphi)$ al término de segundo grado del desarrollo en serie de la función φ, encuentro que:

$$T_2 \, (\varphi) = \frac{1}{2} \left[\sum_{v=0}^{t+\lambda} u_v^2 E \, (x_{j+t-v}^2) + 2 \sum_{l=1}^{t+\lambda} \sum_{v=0}^{t+\lambda-l} u_v \, u_{v+l} \, E \, (x_{j+t-v} \, x_{j+t-v-l}) \right]$$

Como la función $\Phi(\xi, \eta)$ puede también escribirse:

$$\Phi(\xi,\eta) = \int e^{\xi [R_0^{(n)} x_j + R_1^{(n)} x_{j-1} + \ldots + R_\lambda^{(n)} x_{j-\lambda}] + \eta [R_0^{(n)} x_{j+t} + R_1^{(n)} x_{j+t-1} + \ldots + R_\lambda^{(n)} x_{j+t-\lambda}]} dF$$

para obtener el valor de $T_2(\Phi)$ bastará hacer en $T_2(\varphi)$ las sustituciones:

$$u_0 = R_0^{(n)} \eta\ ,\ u_1 = R_1^{(n)} \eta\ , \ldots ,\ u_v = R_v^{(n)} \eta + R_{v-t}^{(n)} \xi, \quad \text{con} \quad (v = \overline{0, t+\lambda})$$

con lo cual encuentro:

$$T_2(\Phi) = \frac{1}{2}\left[\sum_{v=0}^{t+\lambda} E(x_{j+t-v}^2)\ \{R_v^{(n)} \eta + R_{v-t}^{(n)} \xi\}^2 + \right.$$

$$\left. + 2 \sum_{l=1}^{t+\lambda} \sum_{v=0}^{t+\lambda-l} \{R_v^{(n)} \eta + R_{v-t}^{(n)} \xi\}\ \{R_{v+l}^{(n)} \eta + R_{v-t+l}^{(n)} \xi\}\ E(x_{j+t-v}\, x_{j+t-v-l})\right]$$

o sea:

$$T_2(\Phi) = \frac{1}{2}\left[\xi^2 \left\{\sum_{v=0}^{t+\lambda} (R_{v-t}^{(n)})^2\ E(x_{j+t-v}^2) + \right.\right.$$

$$\left. + 2 \sum_{l=1}^{t+\lambda} \sum_{v=0}^{t+\lambda-l} R_v^{(n)}\ R_{v-t+l}^{(n)}\ E(x_{j+t-v}\, x_{j+t-v-l})\right\} +$$

$$+ 2\,\xi\eta \left\{\sum_{v=0}^{t+\lambda} R_v^{(n)}\ R_{v-t}^{(n)}\ E(x_{j+t-v}^2) + \right.$$

$$\left.\left. + \sum_{l=1}^{t+\lambda} \sum_{v=0}^{t+\lambda-l} (R_{v-t}^{(n)}\ R_{v+l}^{(n)} + R_v^{(n)}\ R_{v-t+l}^{(n)})\ E(x_{j+t-v}\, x_{j+t-v-l})\right\} +\right.$$

$$\left. + \eta^2 \left\{\sum_{v=0}^{t+\lambda} (R_v^{(n)})^2\ E(x_{j+t-v}^2) + 2 \sum_{l=1}^{t+\lambda} \sum_{v=0}^{t+\lambda-l} R_{v-t}^{(n)} R_{v+l}^{(n)}\ E(x_{j+t-v}\, x_{j+t-v-l})\right\}\right]$$

que escribiré en la forma:

$$T_2(\Phi) = \frac{1}{2}\left[\xi^2\ \sigma^2(y_j) + 2\ \xi\eta\mu_{11}(y_j\, y_{j+t}) + \eta^2\ \sigma^2(y_{j+t})\right]$$

siendo

$$\sigma^2(y_j) = \sum_{v=0}^{\lambda} (R_v^{(n)})^2 E(x_{j-v}^2) + 2 \sum_{l=1}^{\lambda} \sum_{v=0}^{\lambda-l} R_v^{(n)} R_{v+l}^{(n)} E(x_{j-v} x_{j-v-l})$$

$$\mu_{11}(y_t y_{j+t}) = \sum_{l=0}^{\lambda+t} \sum_{v=0}^{\lambda+t-l} R_v^{(n)} R_{v-t+l}^{(n)} E(x_{j+t-v} x_{j+t-v-l}) +$$

$$+ \sum_{l=1}^{\lambda-t} \sum_{v=0}^{\lambda-t-l} R_v^{(n)} R_{v+t+l}^{(n)} E(x_{j-v} x_{j-v-l}) \qquad [1.1]$$

$$\sigma^2(y_{j+t}) = \sum_{v=0}^{\lambda} (R_v^{(n)})^2 E(x_{j+t-v}^2) + 2 \sum_{l=1}^{\lambda} \sum_{v=0}^{\lambda-l} R_v^{(n)} R_{v+t+l}^{(n)} E(x_{j-v} x_{j-v-l})$$

Indicando con $r\{y_j y_{j+t}\} = r_{j,j+t}$ al coeficiente de correlación buscado, se tendrá:

$$r_{j,j+t} = \frac{\mu_{11}(y_j y_{j+t})}{\sigma(y_j)\ \sigma(y_{j+t})}$$

Teniendo en cuenta nuestras condiciones [III] resulta:

$$\mu_{1,1}(y_j y_{j+t}) = A^2 e^{2\alpha j} \left[e^{2\alpha t} \sum_{l=0}^{\lambda+t} e^{-\alpha l} f(l) \sum_{v=0}^{\lambda+t-l} R_v^{(n)} R_{v+l-t}^{(n)} e^{-2\alpha v} + \right.$$

$$\left. + \sum_{l=1}^{\lambda-t} e^{-\alpha l} f(l) \sum_{v=0}^{\lambda-t-l} R_v^{(n)} R_{v+l+t}^{(n)} e^{-2\alpha v} \right]$$

Es fundamental el estudio de la suma:

$$S_l = \sum_{v=0}^{\lambda-l} R_v^{(n)} R_{v+l}^{(n)} e^{-2\alpha v} \qquad [2]$$

que también podrá ser escrita en esta otra forma:

$$S_l = \sum_{v=0}^{\lambda-l} R_v^{(n)} R_{\lambda-v-l}^{(n)} e^{-2\alpha v} \qquad [3]$$

como se deduce observando que, por ser

$$(1 + x + \ldots + x^{s-1})^n = \sum_{v=0}^{\lambda} R_v^{(n)} x^v$$

de acuerdo con el desarrollo de la potencia de un polinomio, se tendrá $R_v^{(n)} = R_{\lambda-v}^{(n)}$. Observemos también que se tendrá $R_v^{(n)} = 0$ para todo entero $v > \lambda$.

4. — En virtud de [1] y [2] resulta

$$S_l = \frac{-1}{4\pi^2}\int_\gamma \frac{(1-z^s)^n\,(1-z)^{-n}}{z}\,dz \int_\Gamma \frac{(1-w^s)^n\,(1-w)^{-n}}{w^{l+1}} \left[\sum_{v=0}^{\infty} \frac{1}{(e^{2\alpha}wz)^v}\right] dw$$

Si $z = Re^{i\varphi}$, $w = Te^{i\theta}$, $0 \leqq \varphi$, $\theta \leqq 2\pi$ tomando R y T en modo que $\left|\frac{1}{e^{2\alpha}wz}\right| < 1$ por ser $\sum_{v=0}^{\infty} \frac{1}{(e^{2\alpha}wz)^v} = \frac{z}{z - 1/we^{2\alpha}}$

y

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{(1-z^s)^n\,(1-z)^{-n}}{z - 1/we^{2\alpha}}\,dz = (1 - 1/w^s\,e^{2\alpha s})^n\,(1 - 1/we^{2\alpha})^{-n}$$

resultará

$$S_l = \frac{e^{-2\alpha\lambda}}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\left(\frac{1-w^s\,e^{2\alpha s}}{1-we^{2\alpha}}\right)^n \left(\frac{1-w^s}{1-w}\right)^n}{w^{\lambda+l+1}}\,dw. \qquad [4]$$

En cambio la [3] nos lleva a

$$S_l = \frac{-1}{4\pi^2}\int_\gamma \frac{(1-z^s)^n\,(1-z)^{-n}}{z}\,dz \int_{\Gamma_1} \frac{(1-u^s)^n\,(1-u)^{-n}}{u^{\lambda-l+1}} \left[\sum_{v=0}^{\infty}\left(\frac{u}{ze^{2\alpha}}\right)^v\right] du$$

encontrándose

$$S_l = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1} \frac{(1-u^s)^n\,(1-u)^{-n}\left[1-\left(\frac{u}{e^{2\alpha}}\right)^s\right]^n \left[1-\frac{u}{e^{2\alpha}}\right]^n}{u^{\lambda-l+1}}\,du$$

y si hago la sustitución $u = we^{2\alpha}$ encuentro

$$S_l = \frac{e^{2\alpha(l-\lambda)}}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\left(\frac{1-w^s\,e^{2\alpha s}}{1-we^{2\alpha}}\right)^n \left(\frac{1-w^s}{1-w}\right)^n}{w^{\lambda-l+1}}\,dw \qquad [5]$$

De [4] y [5] resulta

$$S_l = e^{-2\alpha\lambda} \frac{D^{(\lambda+l)}\,\varphi(0)}{(\lambda+l)!} = e^{2\alpha(l-\lambda)} \frac{D^{(\lambda-l)}\,\varphi(0)}{(\lambda-l)!} \qquad [5.1]$$

con

$$\varphi(w) = \left(\frac{1-w^s e^{2\alpha s}}{1-we^{2\alpha}}\right)^n \left(\frac{1-w^s}{1-w}\right)^n$$

5. — En base a la significación de S_l la [1.1] podrá escribirse:

$$\mu_{11}(y_j\, y_{j+t}) = A^2 e^{2\alpha j}\left[e^{2\alpha t}\sum_{l=0}^{\lambda+t} e^{-\alpha l} f(l)\, S_{l-t} + \sum_{l=1}^{\lambda-t} e^{-\alpha l} f(l)\, S_{l+t}\right]$$

Reemplazando S_{l-t} por la expresión dada por la [4] y S_{l+t} por la expresión dada por la [5] encuentro:

$$\mu_{11}(y_j\, y_{j+t}) = A^2 e^{2\alpha j}\left[e^{2\alpha(t-\lambda)}\sum_{l=0}^{\lambda+t} e^{-\alpha l} f(l)\, \frac{D^{(\lambda+l-t)}\,\varphi(0)}{(\lambda+l-t)!} + \right.$$

$$\left. + e^{2\alpha(t-\lambda)}\sum_{l=1}^{\lambda-t} e^{\alpha l} f(l)\, \frac{D^{(\lambda-l-t)}\,\varphi(0)}{(\lambda-l-t)!}\right]$$

El desarrollo de las dos sumatorias me conduce, prescindiendo del factor común $e^{2\alpha(t-\lambda)}$ a:

$$\sum_{v=0}^{2\lambda} e^{(\lambda-t-v)\alpha} f(t-\lambda+v)\, \frac{D^{(v)}\,\varphi(0)}{v!}$$

resultado obtenido con observar que, según la [III], $f(l) = f(-l)$. Luego resulta:

$$\mu_{11}(y_j\, y_{j+t}) = A^2 e^{\alpha(2j+t-\lambda)} \sum_{v=0}^{2\lambda} f(t-\lambda+v)\, e^{-\alpha v}\, \frac{D^{(v)}\,\varphi(0)}{v!}$$

De un modo análogo, o bien ya directamente, puesto que $\sigma^2(y_j) = \mu_{11}(y_j\, y_j)$, se tiene:

$$\sigma^2(y_j) = A^2 e^{\alpha(2j-\lambda)} \sum_{v=0}^{2\lambda} f(v-\lambda)\, e^{-\alpha v}\, \frac{D^{(v)}\,\varphi(0)}{v!}$$

$$\sigma^2(y_{j+t}) = A^2 e^{\alpha(2j+2t-\lambda)} \sum_{v=0}^{2\lambda} f(v-\lambda)\, e^{-\alpha v}\, \frac{D^{(v)}\,\varphi(0)}{v!} \qquad [5.2]$$

de donde

$$r_{j,j+t} = \frac{\sum_{v=0}^{2\lambda} f(v+t-\lambda)\, e^{-\alpha v} \frac{D^{(v)}\,\varphi(0)}{v!}}{\sum_{v=0}^{2\lambda} f(v-\lambda)\, e^{-\alpha v} \frac{D^{(v)}\,\varphi(0)}{v!}} = r_t \text{ (independiente de } j\text{).} \qquad [6]$$

Por ser $f(l) = f(-l)$ y teniendo en cuenta la [4] y [5] se concluye también que:

$$r_t = r_{-t}$$

6. — Estudiemos ahora el coeficiente de correlación entre una diferencia finita de orden α aplicada a y_j o sea $\Delta^\alpha y_j$ y la diferencia $\Delta^\beta y_{j+t}$.

En lo que sigue supondré $\alpha > t + \beta$.

Formo la función:

$$\Phi(\xi, \eta) = \int e^{\xi \Delta^\alpha y_j + \eta \Delta^\beta y_{j+t}}\, dF,$$

que podré escribir:

$$\Phi(\xi,\eta) = \int e^{\xi [C_0{}^\alpha y_{j+\alpha} - C_1{}^\alpha y_{j+\alpha-1} + \ldots + (-1)^\alpha C_\alpha{}^\alpha y_j] + \eta [C_0{}^\beta y_{j+t+\beta} - C_1{}^\beta y_{j+t+\beta-1} + \ldots + (-1)^\beta C_\beta{}^\beta y_{j+t}]}\, dF$$

y considero la función

$$\varphi(u_0, u_1, \ldots u_\alpha) = \int e^{u_0 y_j + u_1 y_{j+1} + \ldots + u_\alpha y_{j+\alpha}}\, dF$$

suficiente para nuestro propósito, por cuanto, siendo $\alpha > \beta + t$ las dos diferencias finitas $\Delta^\alpha y_j$, $\Delta^\beta y_{j+t}$ utilizan, en conjunto, los valores y_j, y_{j+1}, $\ldots$ $y_{j+\alpha}$.

Tendré entonces

$$T_2(\varphi) = \frac{1}{2}\left[\sum_{v=0}^{\alpha} u_v^2 r_0 + 2 \sum_{l=1}^{\alpha} \sum_{v=0}^{\alpha-l} u_v\, u_{v+l}\, r_l\right]$$

Para obtener $T_2(\Phi)$ bastará hacer

$$u_v = (-1)^{\alpha-v} C_{\alpha-v}^{\alpha}\, \xi + (-1)^{\beta+t-v} C_{\beta+t-v}^{\beta}\, \eta$$

y como

$$u_v u_{v+l} = (-1)^l C^{\alpha}_{\alpha-v} C^{\alpha}_{\alpha-v-l} \xi^2 +$$
$$+ (-1)^{\alpha+\beta+t} \xi\eta (-1)^l \{C^{\alpha}_{\alpha-v} C^{\beta}_{\beta+t-v-l} + C^{\alpha}_{\alpha-v-l} C^{\beta}_{\beta+t-v}\} +$$
$$+ (-1)^l C^{\beta}_{\beta+t-v} C^{\beta}_{\beta+t-v-l} \eta^2$$

encuentro:

$$T_2(\Phi) = \frac{1}{2}\left[\xi^2\left\{\sum_{v=0}^{\alpha}(C^{\alpha}_{\alpha-v})^2 r_0 + 2\sum_{l=1}^{\alpha}(-1)^l \sum_{v=0}^{\alpha-l} C^{\alpha}_{\alpha-v} C^{\alpha}_{\alpha-v-l} r^l\right\} +\right.$$
$$+ (-1)^{\alpha+\beta+t}\ 2\ \xi\eta\left\{\sum_{l=0}^{\alpha}(-1)^l \sum_{v=0}^{\alpha-l} C^{\alpha}_{\alpha-v} C^{\beta}_{\beta+t-v-l} r_l +\right.$$
$$\left.\left. + \sum_{l=1}^{\alpha}(-1)^l \sum_{v=0}^{\alpha-l} C^{\alpha}_{\alpha-v-l} C^{\beta}_{\beta+t-v} r_l\right\} +\right.$$
$$\left. + \eta^2\left\{\sum_{v=0}^{\alpha}(C^{\beta}_{\beta+t-v})^2 r_0 + 2\sum_{l=1}^{\alpha}(-1)^l \sum_{v=0}^{\alpha-l} C^{\beta}_{\beta+t-v} C^{\beta}_{\beta+t-v-l} r_l\right\}\right] =$$
$$= \frac{1}{2}\left[a\,\xi^2 + 2\,c\,\xi\eta + b\,\eta^2\right]$$

Indicando con $r^{(\alpha,\beta)}_{j,j+t}$ al coeficiente de correlación buscado se tendrá:

$$r^{(\alpha,\beta)}_{j,j+t} = \frac{c}{\sqrt{ab}}$$

Siendo

$$c = (-1)^{\alpha+\beta+t}\left[\sum_{l=0}^{\alpha}(-1)^l \sum_{v=0}^{\alpha-l} C^{\alpha}_{v} C^{\beta}_{\beta+t-v-l} r_l +\right.$$
$$\left. + \sum_{l=1}^{\alpha}(-1)^l \sum_{v=0}^{\alpha-l} C^{\alpha}_{v+l} C^{\beta}_{\beta+t-v} r_l\right]$$

y como

$$\sum_{v=0}^{\alpha-l} C^{\alpha}_{v} C^{\beta}_{\beta+t-v-l} = C^{\alpha+\beta}_{\beta+t-l}$$

como se evidencia fácilmente recordando la definición constructiva de las combinaciones expresadas en el segundo miembro se tendrá

$$c = (-1)^{\alpha+\beta+t}\left[\sum_{l=0}^{\alpha}(-1)^l C^{\alpha+\beta}_{\beta+t-l} r_l + \sum_{l=1}^{\alpha}(-1)^l C^{\alpha+\beta}_{\beta+t+l} r_l\right]$$

desarrollando las sumatorias y teniendo presente que hemos supuesto $\alpha > t + \beta$ se deduce:

$$c = (-1)^{\alpha+\beta+t}\,[\{C^{\alpha+\beta}_{\beta+t}\,r_0 - C^{\alpha+\beta}_{\beta+t-1}\,r_1 + \ldots + C^{\alpha+\beta}_{0}(-1)^{\beta+t}\,r_{\beta+t}\} +$$
$$+ \{-C^{\alpha+\beta}_{\beta+t+1}\,r_1 + C^{\alpha+\beta}_{\beta+t+2}\,r_2 + \ldots + (-1)^{\alpha-t}\,C^{\alpha+\beta}_{\beta+\alpha}\,r_{\alpha-t}\}]$$

y como era $r_t = r_{-t}$ resulta:

$$c = (-1)^{\alpha+\beta+t}\,[(-1)^{\beta+t}\,\{C^{\alpha+\beta}_{0}\,r_{t+\beta} - \ldots + (-1)^{\alpha+\beta}\,C^{\alpha+\beta}_{\alpha+\beta}\,r_{t-\alpha}\}]$$

de donde:

$$c = (-1)^{\alpha}\,\Delta^{\alpha+\beta}\,r_{t-\alpha}$$

Transformaciones análogas efectuadas sobre los valores a y b nos conducen entonces a la fórmula de Anderson (4):

$$r^{(\alpha,\beta)}_{j,j+t} = \frac{(-1)^{\alpha}\,\Delta^{\alpha+\beta}\,r_{t-\alpha}}{[(-1)^{\alpha}\,\Delta^{2\alpha}\,r_{-\alpha}\,(-1)^{\beta}\,\Delta^{2\beta}\,r_{-\beta}]^{1/2}} = r^{(\alpha,\beta)}_{t} \quad \text{(independiente de } j\text{)}. \qquad [7]$$

7. — En particular tendremos

$$r^{(m,m)}_{q} = \frac{\Delta^{2m}\,r_{q-m}}{\Delta^{2m}\,r_{-m}}$$

pero como

$$\Delta^{2m}\,r_{q-m} = \sum_{l=0}^{2m}(-1)^{l}\,C^{2m}_{l}\,r_{q+m-l}$$

y

$$r_{q+m-l} = \frac{\sum_{v=0}^{2\lambda} f(v+q+m-l-\lambda)\,e^{-\alpha v}\,\dfrac{D^{(v)}\,\varphi(0)}{v!}}{S} \qquad [8]$$

habiendo hecho, para abreviar,

$$S = \sum_{v=0}^{2\lambda} f(v-\lambda)\,e^{-\alpha v}\,\frac{D^{(v)}\,\varphi(0)}{v!}$$

encuentro

$$S\,\Delta^{2m}\,r_{q-m} = \sum_{l=0}^{2m}(-1)^{l}\,C^{2m}_{l}\sum_{v=0}^{2\lambda} f(v+q+m-l-\lambda)\,e^{-\alpha v}\,\frac{D^{(v)}\,\varphi(0)}{v!}$$

Si hago la sustitución $v - l = \tau$ la nueva variable estará recorriendo el intervalo: $-2m$, $+2\lambda$.

Se tiene entonces:

$$S\Delta^{2m} r_{q-m} = \sum_{\tau=-2m}^{2\lambda} f(q+m-\lambda+\tau) \sum_{l=0}^{2m} (-1)^l C_l^{2m} e^{-\alpha(l+\tau)} \frac{D^{(l+\tau)} \varphi(0)}{(l+\tau)!} =$$

$$= \sum_{\tau=-2m}^{2\lambda} f(q+m-\lambda+\tau)\, S_\tau .$$

siendo

$$S_\tau = e^{-\alpha\tau} \sum_{l=0}^{2m} (-1)^l C_l^{2m} e^{-\alpha l} \frac{D^{(l+\tau)} \varphi(0)}{(l+\tau)!}$$

La [5.1] nos permite escribir

$$\frac{D^{(l+\tau)} \varphi(0)}{(l+\tau)!} = e^{2\alpha(l+\tau-\lambda)} \frac{D^{(2\lambda-l-\tau)} \varphi(0)}{(2\lambda-l-\tau)!}$$

obteniéndose entonces

$$S_\tau = e^{\alpha(\tau-2\lambda)} \sum_{l=0}^{2m} (-1)^l C_l^{2m} e^{\alpha l} \frac{D^{(2\lambda-l-\tau)} \varphi(0)}{(2\lambda-l-\tau)!}$$

o sea

$$S_\tau = \frac{e^{\alpha(\tau-2\lambda)}}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{\left(\frac{1-w^s e^{2\alpha s}}{1-we^{2\alpha}}\right)^n \left(\frac{1-w^s}{1-w}\right)^n}{w^{2\lambda-\tau+1}} \left[\sum_{l=0}^{2m} (-1)^l C_l^{2m} e^{\alpha l} w^l\right] dw =$$

$$= \frac{e^{\alpha(\tau-2\lambda)}}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{\left(\frac{1-w^s e^{2\alpha s}}{1-we^{2\alpha}}\right)^n \left(\frac{1-w^s}{1-w}\right)^n (1-we^{2\alpha})^{2m}}{w^{2\lambda-\tau+1}} dw$$

Luego resulta

$$S\Delta^{2m} r_{q-m} = \frac{e^{-\alpha\lambda}}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{\left(\frac{1-w^s e^{2\alpha s}}{1-we^{2\alpha}}\right)^n \left(\frac{1-w^s}{1-w}\right)^n (1-we^{\alpha})^{2m}}{w^\lambda}$$

$$\left[\sum_{\tau=-2m}^{2\lambda} f(q+m-\lambda+\tau)\, e^{\alpha(-\lambda+\tau)} w^{-\lambda+\tau}\right] \frac{dw}{w}$$

o bien

$$S\Delta^{2m} r_{q-m} = \frac{e^{-\alpha(\lambda+m)}}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\left(\frac{1-w^s e^{2\alpha s}}{1-we^{2\alpha}}\right)^n \left(\frac{1-w^s}{1-w}\right)^n (1-we^{\alpha})^{2m}}{w^{m+\lambda}}$$

$$\left[\sum_{\tau=-2m}^{2\lambda} f(q+m-\lambda+\tau)\, e^{\alpha(m-\lambda+\tau)}\, w^{m-\lambda+\tau}\right]\frac{dw}{w}$$

Se tiene entonces

$$r_1^{(m,m)} = \frac{\displaystyle\int_{\Gamma} \frac{\left(\frac{1-w^s e^{2\alpha s}}{1-we^{2\alpha}}\right)^n \left(\frac{1-w^s}{1-w}\right)^n}{w^{m+\lambda}} (1-we^{\alpha})^{2m}}{\displaystyle\int_{\Gamma} \frac{\left(\frac{1-w^s e^{2\alpha s}}{1-we^{2\alpha}}\right)^n \left(\frac{1-w^s}{1-w}\right)^n}{w^{m+\lambda}} (1-we^{\alpha})^{2m}}$$

$$\frac{\left[\displaystyle\sum_{\tau=-2m}^{2\lambda} f(1+m-\lambda+\tau)\, e^{(m-\lambda+\tau)\alpha}\, w^{m-\lambda+\tau}\right]\frac{dw}{w}}{\left[\displaystyle\sum_{\tau=-2m}^{2\lambda} f(m-\lambda+\tau)\, e^{(m-\lambda+\tau)\alpha}\, w^{m-\lambda+\tau}\right]\frac{dw}{w}}$$

Para abreviar escribo

$$F_0(w) = \sum_{\tau=-2m}^{2\lambda} f(m-\lambda+\tau)\, e^{(m-\lambda+\tau)\alpha}\, w^{m-\lambda+\tau}$$

$$F_1(w) = \sum_{\tau=-2m}^{2\lambda} f(1+m-\lambda+\tau)\, e^{(m-\lambda+\tau)\alpha}\, w^{m-\lambda+\tau}$$

Por ser $f(t) = f(-t)$ podré escribir:

$$F_0(w) = 1 + f(1)\,[e^{\alpha} w + e^{-\alpha} w^{-1}] + f(2)\,[e^{2\alpha} w^2 + e^{-2\alpha} w^{-2}] +$$
$$+ \ldots + f(\lambda+m)\,[e^{(m+\lambda)\alpha} w^{m+\lambda} + e^{-(m+\lambda)\alpha} w^{-(m+\lambda)}]$$

$$F_1(w) = e^{-\alpha} \cdot w^{-1}\Big[1 + f(1)\,[e^{\alpha} w + e^{-\alpha} w^{-1})] +$$
$$+ \ldots + f(m+\lambda-1)\,[e^{(m+\lambda-1)\alpha} w^{m+\lambda-1} + e^{-(m+\lambda-1)\alpha} w^{-(m+\lambda-1)}] +$$
$$+ f(m+\lambda)\, e^{(m+\lambda)\alpha} w^{m+\lambda} + f(m+\lambda+1)\, e^{(m+\lambda+1)\alpha} w^{m+\lambda+1}\Big]$$

Como se ve $F_0(w)$ y $F_1(w)$ difieren solamente en los últimos términos.

Si los coeficientes de autocorrelación de la serie básica $-f(l)$ — para un cierto valor L arbitrariamente grande y para todo $l > L$ fuesen nulos, entonces bastará tomar m y λ o sea n suficientemente grandes para que no haya entre $F_0(w)$ y $F_1(w)$ ninguna diferencia. En cambio, si los $f(l)$ no aceptasen una condición de atenuación de ese tipo sino que se supone que la serie $\sum_{l=1}^{\infty} f(l)\,[e^{\alpha l} w^l + e^{-\alpha l} w^{-l}]$ es uniformemente convergente en el intervalo $0 \leq w \leq 1$, lo que constituye una condición menos restrictiva que la dada anteriormente, entonces axistirá un valor a atribuirse a m y a λ o sea a n suficientemente grande para que la diferencia entre $F_0(w)$ y $F_1(w)$ sea tan pequeña como se quiera.

Hagamos ahora, para abreviar las subsiguientes escrituras:

$$\left(\frac{1 - w^s e^{2\alpha s}}{1 - w e^{2\alpha}} \; \frac{1 - w^s}{1 - w}\right) \Big/ w^{\frac{m}{n} + s - 1} = \Phi(w)$$

$$(1 - w e^{\alpha})^{2m} F_0(w) = H_0(w)$$

de donde

$$(1 - w e^{\alpha})^{2m} F_1(w) = e^{-\alpha} w^{-1} [H_0(w) + \varepsilon]$$

con $\varepsilon \longrightarrow 0$ con $n, m \longrightarrow \infty$.

Nos queda así

$$r_1^{(m,m)} = \frac{\int_\Gamma [\Phi(w)]^n e^{-\alpha} w^{-1} H_0(w) \frac{dw}{w}}{\int_\Gamma [\Phi(w)]^n H_0(w) \frac{dw}{w}} + \varepsilon_1$$

ε_1 con igual comportamiento que ε.

Voy a demostrar ahora que existe un cierto número ξ tal que $e^{-\alpha} < \xi < 1$ y para el cual se verifica:

$$\Phi(\xi) > 0 \qquad \Phi'(\xi) = 0 \qquad \Phi''(\xi) > 0. \qquad [C]$$

que son las condiciones requeridas para la aplicación del método del más rápido descenso. La [C], que no es otra cosa que la condición de un mínimo, se reemplaza por las condiciones de máximo

cuando en lugar del estudio de la variable compleja se pasa al campo real. De este modo lo resolvió en su caso Romanovsky de un modo elegante adaptando la exposición hecha por Polya y Szego (5) en su conocido Tratado. En nuestro caso nos valdremos del método que explica y expone en condiciones de problemas físicos más sencillos, el Sr. Fowler. Esta razón explica que dediquemos algunos pasos intermedios necesarios para nuestra demostración y el Teorema fundamental que se deducirá de la misma.

Se observa que

$$\frac{\Phi'(w)}{\Phi(w)} = -\frac{R+s-1}{w} + \frac{f_1'(w)}{f_1(w)} + \frac{f_2'(w)}{f_2(w)}$$

siendo

$$R = \frac{m}{n}$$

$$f_1(w) = \frac{1-w^s}{1-w} = 1 + w + \ldots + w^{s-1}$$

$$f_2(w) = \frac{1-w^s e^{2\alpha s}}{1-we^{2\alpha}} = 1 + we^{2\alpha} + \ldots + w^{s-1} e^{2\alpha(s-1)}$$

Se sigue entonces que, para valores $w > 0$

$$\lim_{w \to 0} \frac{\Phi'(w)}{\Phi(w)} \longrightarrow -\alpha$$

Para $w = e^{-\alpha}$ se tiene

$$\frac{\Phi'}{\Phi} = -Re^{\alpha}$$

Por las condiciones de nuestro problema, siendo R esencialmente positivo, se deduce entonces que en el intervalo $0 \leqq w \leqq e^{-\alpha}$ no puede conseguirse una variación del signo negativo de $\Phi'(w)$.

Fácil es demostrar que la función $y = \frac{wf'}{f}$ con $f = f_1 + f_2$ aunque acotada, es creciente para $w > 0$.

Escribiendo

$$f(w) = \sum_{0}^{s-1} c^n w_n \qquad c_n = 1 + e^{2\alpha n}$$

se tiene

$$y = \frac{\Sigma\, n\, c_n\, w^n}{\Sigma\, c_n\, w^n}$$

y su derivada multiplicada por w nos da, siguiendo en este pequeño paso una indicación de Fowler:

$$wy' = [(\Sigma\, n^2\, c_n\, w^n)\,(\Sigma\, c_n\, w^n) - (\Sigma\, c_n\, n\, w^n)^2]/(\Sigma\, c_n\, w_n)^2$$

Para w positivo el signo de y' depende del numerador de esta fracción que indico con N.

Siendo

$$(\Sigma\, n^2\, c^n\, w^n)\,(\Sigma\, c_n\, w^n) = \Sigma\, n^2\, c_n^2\, w^{2n} + \Sigma\Sigma\, n^2\, c_n\, c_{n_1}\, w^{n+n_1} \qquad (n \neq n_1)$$

y $$(\Sigma\, n\, c_n\, w^n)^2 = \Sigma\, n^2\, c_n^2\, w^{2n} + 2\,\Sigma\,\Sigma\, n_1^2\, c_n\, c_{n_1}\, w^{n+n_1} \qquad (n \neq n_1)$$

resulta:

$$N = \Sigma\,\Sigma\, n^2\, c_n\, c_{n_1}\, w^{n+n_1} - 2\,\Sigma\,\Sigma\, n_1^2\, c_n\, c_{n_1}\, w^{n+n_1}$$

o sea $$N = \Sigma\,\Sigma\,(n - n_1)^2\, c_n\, c_{n_1}\, w^{n+n_1}$$ por ser $n \neq n_1$.

De aquí se sigue que $\dfrac{w f_2'(w)}{f_2(w)}$ como $\dfrac{w f_1'(w)}{f_1(w)}$ son funciones crecientes para $w > 0$, de donde:

$$\frac{e^{-2\alpha} f_2'(e^{-2\alpha})}{f_2(e^{-2\alpha})} < \frac{f_2'(1)}{f_2(1)}$$

Sin dificultad se calcula que

$$\frac{e^{-2\alpha} f_2'(e^{-2\alpha})}{f_2(e^{-2\alpha})} = \frac{f_1'(1)}{f_1(1)} - \frac{s-1}{2}$$

de donde siendo

$$0 < A = \frac{f_2'(1)}{f_2(1)} - \frac{s-1}{2}$$

se sigue que

$$\frac{\Phi'(1)}{\Phi(1)} = -R + A$$

Para todo valor de R tal que $0 < R < A$ se tendrá entonces

$$\frac{\Phi'(1)}{\Phi(1)} > 0$$

luego para $w = \xi$ siendo $e^{-\alpha} < \xi < 1$ resulta

$$\Phi'(\xi) = 0 \quad \Phi''(\xi) > 0.$$

Ya estamos en condiciones de apoyarnos en el método del más rápido descenso tal como lo expone Fowler y últimamente lo fuera también por Bruce Lindsay (6)

Hagamos:

$$\Phi(w) = e^{h(w)}$$

de lo cual resulta

$$\left[\frac{\Phi(w)}{\Phi(\xi)}\right]^n = e^{n[h(w)-h(\xi)} =$$

$$= e^{n\left[(w-\xi)h'(\xi) + \frac{(w-\xi)^2}{2}h''(\xi) + \frac{(w-\xi)^3}{3!}h'''(\xi) + \frac{(w-\xi)^4}{4!}h^{IV}(\xi_1)\right]}$$

Tomemos ahora $w = \xi e^{i\beta}$ con β muy pequeño de modo que estemos autorizados a escribir, en lugar de cos β y de sen β, los valores 1 y β. Por ello y por ser

$$\Phi(\xi) = \Phi(\xi) h'((\xi), \quad h'(\xi) = 0$$

y además $h''(\xi) = \dfrac{\Phi''\Phi - [\Phi']^2}{[\Phi]^2} = \dfrac{\Phi''(\xi)}{\Phi(\xi)}$ se deduce:

$$\left[\frac{\Phi(w)}{\Phi(\xi)}\right]^n = e^{-\frac{n\beta^2\xi^2}{2}\frac{\Phi''(\xi)}{\Phi(\xi)} + nk\beta^3 + O(\beta^4)}$$

en la que k depende, ciertamente, de β, y O es la indicatriz de orden de magnitud. Luego:

$$|\Phi(w)|^n = [\Phi(\xi)]^n \, e^{-\frac{n\beta^2\xi^2}{2}\frac{\Phi''(\xi)}{\Phi(\xi)} + nk\beta^3 + O(\beta^4)}$$

Refiramos estas consideraciones a la integral

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma [\Phi(w)]^n e^{-} \; w^{-1} H_0(w) \frac{dw}{w}$$

en la que, haciendo $e^{-\alpha} w^{-1} H_0(w) = F(w)$ se escribirá en la forma

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma [\Phi(w)]^n F(w) \frac{dw}{w}$$

Es una expresión asintótica de esta integral la que a nosotros nos interesa cuando $n \longrightarrow \infty$ y (por ser $R = \frac{m}{n}$ = constante) también cuando $m \longrightarrow \infty$.

Podemos pues considerar n suficientemente grande de modo de suponer que $\beta\sqrt{n}$ abarca el intervalo $-\infty, +\infty$ mientras que β y el mismo término $n\beta^3$ se mantienen pequeños. Luego, al hacer $w = \xi e^{i\beta}$ podré escribir:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma [\Phi(w)]^n F(w) \frac{dw}{w} = \frac{1}{2\pi}[\Phi(\xi)]^n \int_{+\infty}^{-\infty} e^{-\frac{n\beta^2\xi^2\Phi''(\xi)}{2\Phi(\xi)}} D(\xi, \beta)\, d\beta$$

siendo

$$D(\xi, \beta) = F(\xi e^{i\beta}) = F(\xi + i\,\xi\beta)$$

y de consiguiente:

$$D(\xi, \beta) = F(\xi) + i\beta\xi F'(\xi) -$$

$$- \frac{\beta^2\xi^2}{2} F''(\xi) - i\frac{\beta^3\xi^3}{3!} F'''(\xi) + \frac{\beta_4\xi_4}{4!} F^{IV}(\xi_1)$$

El haber tomado la última integral entre los límites $-\infty$ y $+\infty$ introduce, cuando n es grande, un error exponencialmente pequeño. Ello proviene de que

$$\int_a^b e^{-nk(x-\xi)^2} dx$$

cuando es $a < \xi < b$ y es (como en nuestro caso lo era $\Phi''(\xi)$) $k > 0$, cuando $n \longrightarrow \infty$ el valor de la integral tiende al de la expresión $\sqrt{\pi/kn}$ como se ve fácilmente practicando la sustitución $(x - \xi)\sqrt{kn} = t$ y recordando elementales propiedades de la función de Gauss.

Pero de estas mismas propiedades se sigue que en la anterior integral sometida a estudio, la contribución de los términos de $D(\xi, \beta)$ es: nula, cuando los términos son de potencias impares en la variable β, y de un orden $n^{-\frac{3}{2}}$ para los casos en que interviene β^2 y β_4. De donde se sigue que el solo término quec ontribuye al resultado es el primero, o sea $F(\xi)$, de todo lo cual se concluye que

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}[\Phi(w)]^n F(w)\frac{dw}{w} = \frac{[\Phi(\xi)]}{[2\pi n\xi^2\Phi''(\xi)/\Phi(\xi)]^{1/2}}\left[F(\xi)+O\left(\frac{1}{n}\right)\right]$$

Basta volver a nuestra integral

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}[\Phi(w)]^n e^{-\alpha}w^{-1}H_0(w)\frac{dw}{w}$$

y al cociente que nos daba $r_1^{(m,m)}$ para deducir que

$$\lim r_1^{(m,m)} = e^{-\alpha}\xi^{-1}$$

cuando $n, m \longrightarrow \infty$ y es $\frac{m}{n} = R$, siendo R cualquier número positivo tal que $R < A$.

Por ser $e^{-\alpha} < \xi < 1$ se deduce entonces la consecuencia, cuyo rol es fundamental en nuestro estudio:

$$\lim r_1^{(m,m)} = c < 1$$

cuando el límite se toma en las condiciones anteriormente especificadas.

8. — De la fórmula [7] se deduce también que

$$r_1^{(m+2,m)} = \frac{(-1)^{m+2}\Delta^{2(m+1)}r_{-(m+1)}}{[(-1)^{m+2}\Delta^{2(m+2)}r_{-(m+2)}(-1)^m\Delta^{2m}r_{-m}]^{1/2}}$$

o sea:

$$r_1^{(m+2,\,m)} = -\frac{(-1)^{m+1}\,\Delta^{2(m+1)}\,r_{-(m+1)}}{[(-1)^{m+2}\,\Delta^{2(m+2)}\,r_{-(m+2)}\,(-1)^{m}\,\Delta^{2m}\,r_{-m}]^{1/2}}$$

expresión que escribiré bajo la forma

$$r_1^{(m+2,\,m)} = -\frac{Y_{m+1}}{[Y_{m+2}\,Y_m]^{1/2}}$$

Pero siendo:

$$S\,\Delta^{2m}\,r_{q-m} = \frac{e^{-\alpha(\lambda+m)}}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\left[\dfrac{1-w^s\,e^{2\alpha s}}{1-w\,e^{2\alpha}}\;\dfrac{1-w^s}{1-w}\right]^n}{w^{m+\lambda}}\,(1-w\,e^{\alpha})^{2m}$$

$$\left[\sum_{\tau=-2m}^{2\lambda} f(q+m-\lambda+\tau)\,e^{\alpha(m-\lambda+\tau)}\,w^{m-\lambda+\tau}\right]\frac{dw}{w}$$

Bastará tomar

$$Y_{m+v} = \int_\Gamma \left[\frac{(-1)^{R+\frac{v}{n}}\,f(w)\,(1-w\,e^{\alpha})^{2R+\frac{v}{n}}}{w^{R+s-1+\frac{v}{n}}}\right]^n$$

$$\left[\sum_{\tau=-2(m+v)}^{2\lambda} f(v+m-\lambda+\tau)\,e^{\alpha(v+m-\lambda+\tau)}\,w^{v+m-\lambda+\tau}\right]\frac{dw}{w}$$

con

$$v = 0, 1, 2. \qquad f(w) = \frac{1-w^s\,e^{2\alpha s}}{1-w\,e^{2\alpha}}\cdot\frac{1-w^s}{1-w}$$

Se sigue entonces, sin dificultad, que:

$$\lim r_1^{(m+2,\,m)} = -1$$

cuando $n, m \longrightarrow \infty$ y es $\dfrac{m}{n} = R$ constante.

Esta conclusión, unida a la anterior ($\lim r_1^{(m,\,m)} = c < 1$) contiene lo fundamental para concluir que nuestra sucesión $\{x\}$ conduce a $\Delta^m x^{(n)}$ a una disposición estocásticamente sinusoidal con $n, m \longrightarrow \infty$ y $\dfrac{m}{n} = R < A$.

9. — La conclusión referida en el párrafo anterior supone la subsistencia, para nuestro caso, de los análisis, verdaderamente espléndidos, desarrollados por Slutzky para las condiciones [I] y mantenidos directamente, en el caso de las condiciones [II] estudiadas en las bellas memorias de Romanovsky. En esta segunda parte de mi presente trabajo adaptaré, a mis nuevas condiciones, los métodos de cálculo de Slutzky.

Fácilmente se calcula el valor de

$$E\,(\Delta^2 y_j \,.\, y_{j+1}) \;=\; E\,[y_{j+1}\,\{y_{j+2} - 2\,y_{j+1} + y_j\}\,] \;=$$
$$=\; r_1\,\sigma\,(y_{j+1})\,\sigma\,(y_j) \;-\; 2\,\sigma^2\,(y_{j+1}) \;+\; r_1\,\sigma\,(y_{j+1})\,\sigma\,(y_{j+2}).$$

Nuestra fórmula [5.2] y 8.1] daba

$$\sigma^2\,(y_{j+t}) \;=\; A^2\,e^{\alpha\,(2\,j\,+\,2\,t\,-\,\lambda)}\,S \qquad [9]$$

Se tiene por tanto

$$E\,(\Delta^2 y_j \,.\, y_{j+1}) \;=\; A^2\,S e^{\alpha\,(2\,j\,+\,1\,-\,\lambda)}\,[r_1 - 2\,e^{\alpha} + r_1\,e^{2\,\alpha}]$$

En la Teoría de la Correlación [7] se tenía

$$r\,(x\,.\,y) \;=\; \frac{\mu_{1.1}\,(xy)}{\sigma\,(x)\;\sigma\,(y)}$$

La línea de regresión de las y ligadas estaba entonces dada por

$$\overline{y}_x = r\,\frac{\sigma\,(y)}{\sigma\,(x)}\,x \;=\; \frac{\mu^{1.1}\,(xy)}{\sigma^2\,(x)}\,x$$

De esta ecuación se puede pasar a la igualdad aproximada

$$y \cong \frac{\mu^{1.1}\,(xy)}{\sigma^2\,(x)}\,x$$

Paralelamente se tendrá entonces:

$$\Delta^2 y \cong \frac{E\,(\Delta^2 y_j \,.\, y_{j+1}}{\sigma^2\,(y_{j+1})}\,y_{j+1}$$

o sea

$$\Delta^2 y_j \cong \frac{A^2 S\,e^{\alpha\,(2\,j+1-\lambda)}\,[r_1 - 2\,e^{\alpha} + r_1\,e^{2\,\alpha}]}{A^2\,S\,e^{\alpha\,(2\,j\,+\,2\,-\,\lambda)}} = (r_1 e^{\alpha} - 2 + r_1\,e^{-\alpha})\,y_{j+1}$$

Indiquemos con α_{j+2} el error de esta correspondencia y hagamos

$$\alpha_{j+2} = \beta_{j+2}\, \sigma\,(y_j)$$

y en general para un error

$$\alpha_{j+s} = \beta_{j+s}\, \sigma\,(y_{j+s-2})\, e^{(2-s)\alpha}$$

Se tendrá entonces

$$\Delta^2 y_j = (r_1\, e^{\alpha} - 2 + r_1\, e^{-\alpha})\, y_{j+1} + \beta_{j+2}\, \sigma\,(y_j)$$

y como $$\Delta^2 y_j = y_{j+2} - 2\, y_{j+1} + y_j$$

$$y_{j+2} = r_1\,(e^{\alpha} + e^{-\alpha})\, y_{j+1} - y_j + \beta_{j+2}\, \sigma\,(y_j)$$

de donde

$$\beta_{j+2} = \frac{y_{j+2} - r_1\,(e^{\alpha} + e^{-\alpha})\, y_{j+1} + y_j}{\sigma\,(y_j)}$$

La esperanza matemática del cuadrado de este numerador nos da

$$\sigma^2\,(y_{j+2}) + r_1^2\,(e^{2\alpha} + 2 + e^{-2\alpha})\, \sigma^2\,(y_{j+1}) + \sigma^2\,(y_j) -$$
$$- 2\, r_1^2\,(e^{\alpha} + e^{-\alpha})\, \sigma\,(y_{j+1})\, \sigma\,(y_{j+2}) - 2\, r_1^2\,(e^{\alpha} + e^{-\alpha})\, \sigma\,(y_j)\, \sigma\,(y_{j+1}) +$$
$$+ 2\, r_2\, \sigma\,(y_j)\, \sigma\,(y_{j+2}) = N\,.$$

Según nuestra fórmula [9] se tenía

$$\sigma^2\,(y_{j+t}) = A^2\, e^{\alpha\,(2\,j+2\,t-\lambda)}\, S$$

Luego la relación:

$$\sigma^2(y_{j+t}) = \sigma^2(y_j)\, e^{2\,\alpha\,t}$$

$$\sigma\,(y_{j+t}) = \sigma\,(y_j)\, e^{\alpha\,t}\,.$$

En base a ellas se encuentra:

$$N = \sigma^2\,(y_j)\,[e^{4\alpha} + r_1^2\,(e^{2\alpha} + 2 + e^{-2\alpha})\, e^{2\alpha} + 1 -$$
$$- 2\, r_1^2\,(e^{\alpha} + e^{-\alpha})\, e^{3\alpha} - 2\, r_1^2\,(e^{\alpha} + e^{-\alpha})\, e^{\alpha} + 2\, r_2\, e^{2\alpha}]$$

Luego

$$E\,(\beta^2_{j+2}) = 1 + e^{4\alpha} - r_1^2\,(1 + 2\,e^{2\alpha} + e^{4\alpha}) + 2\,e^{2\alpha}\,r_2\,.$$

Para el coeficiente $r\,(y_{j+1}\,.\,\Delta^2\,y_j) = \varsigma_1$ se tendrá:

$$\varsigma_1 = \frac{E\,(y_{j+1}\,\Delta^2\,y_j)}{[E\,(y^2_{j+1})\,E\,(\Delta^2\,y_j)^2]^{1/2}}$$

Pero

$$\Delta^2\,y_j = (r_1\,e^{\alpha} - 2 + r_1\,e^{-\alpha})\,y_{j+1} + \beta_{j+2}\,\sigma\,(y_j)$$

y como

$$\beta_{j+2}\,\sigma\,(y_j)\,y_{j+1} = y_{j+1}\,y_{j+2} - r_1\,(e^{\alpha} + e^{-\alpha})\,y^2_{j+1} + y_j\,y_{j+1}$$

se tendrá:

$$(\Delta^2\,y_j)^2 = (r_1\,e^{\alpha} - 2 + r_1\,e^{-\alpha})^2\,y^2_{j+1} + \beta^2_{j+2}\,\sigma^2\,(y_j) + 2\,(r_1\,e^{\alpha} - 2 + \\ + r_1\,e^{-\alpha})\,[y_{j+1}\,y_{j+2} - r_1\,(e^{\alpha} + e^{-\alpha})\,y^2_{j+1} + y_j\,y_{j+1}]$$

de donde

$$E\,(\Delta^2\,y_j)^2 = \sigma^2\,(y_j)\,[(r_1\,e^{2\alpha} - 2\,e^{\alpha} + r_1)^2 + E\,(\beta^2_{j+2})]$$

y siendo

$$E\,(\beta^2_{j+2}) = 1 + e^{4\alpha} - r_1^2\,(1 + 2\,e^{2\alpha} + e^{4\alpha}) + 2\,r_2\,e^{2\alpha}$$

obtengo

$$E\,[\Delta^2\,y_j]^2 = \sigma^2\,(y_j)\,[1 + 4\,e^{2\alpha} + e^{4\alpha} - 4\,r_1\,e^{\alpha}\,(1 + e^{2\alpha}) + 2\,r_2\,e^{2\alpha}]$$

lo que nos permite escribir:

$$\varsigma_1 = \frac{A^2\,S\,e^{\alpha(2j+1-\lambda)}\,(r_1\,e^{2\alpha} - 2\,e^{\alpha} + r_1)}{[\sigma^2\,(y_{j+1})\,\sigma^2\,(y_j)\,\{1 + 4\,e^{2\alpha} + e^{4\alpha} - 4\,r_1\,e^{\alpha}\,(1 + e^{2\alpha}) + 2\,r_2\,e^{2\alpha}\}]^{1/2}}$$

$$\varsigma_1 = (r_1\,e^{2\alpha} - 2\,e^{\alpha} + r_1)/[1 + 4\,e^{2\alpha} + e^{4\alpha} - 4\,r_1\,e^{\alpha}\,(1 + e^{2\alpha}) + 2\,r_2\,e^{2\alpha}]^{1/2}$$

y racionalizando

$$\varsigma_1^2 = \frac{r_1^2\,e^{4\alpha} + 4\,e^{2\alpha} + r_1^2 - 4\,r_1\,e^{3\alpha} - 4\,r_1\,e^{\alpha} + 2\,r_1^2\,e^{2\alpha}}{1 + 4\,e^{2\alpha} + e^{4\alpha} - 4\,r_1\,e^{\alpha}\,(1 + e^{2\alpha}) + 2\,r_2\,e^{2\alpha}}$$

de donde

$$1 - \varsigma_1^2 = \frac{1 + e^{4\alpha} + 2\, r_2\, e^{2\alpha} - r_1^2\, e^{4\alpha} - r_1^2 - 2\, r_1^2\, e^{2\alpha}}{1 + 4\, e^{2\alpha} + e^{4\alpha} - 4\, r_1\, e^{\alpha} - 4\, r_1\, e^{3\alpha} + 2\, r_2\, e^{2\alpha}}$$

y teniendo en cuenta que el numerador no es otra cosa que $E\,(\beta^2_{j+2})$ se deduce

$$E\,(\beta^2_{j+2}) = (1 - \varsigma_1^2)\,[1 + 4\, e^{2\alpha} + e^{4\alpha} - 4\, r_1\, e^{\alpha} - 4\, r_1\, e^{3\alpha} + 2\, r_2\, e^{2\alpha}]$$

y como en el estudio de nuestra sucesión $\{x_j\}$ se verificaba $\varsigma_1 \to -1$ se sigue que se tendrá

$$\lim_{n \to \infty} E\,(\beta^2_{j+2}) = 0$$

de donde también

$$\lim_{n \to \infty} \beta^2_{j+2} = 0$$

De estos dos resultados, por el teorema de Tchebycheff, se sigue que, dado ε y η arbitrariamente pequeños, se tendrá

$$P\,\{|\,\beta_{j+2}\,| > \varepsilon\} < \eta$$

con n suficientemente grande.

10. — Podemos volver a la relación

$$y_{j+2} = r_1\,(e^{\alpha} + e^{-\alpha})\, y_{j+1} - y_j + \sigma\,(y_j)\, \beta_{j+2}$$

la cual, conforme a lo visto, con una probabilidad que tiende a la unidad con $n \to \infty$, se trocará en la relación:

$$y_{j+2} = r_1\,(e^{\alpha} + e^{-\alpha})\, y_{j+1} - y_j \qquad [5]$$

Hago entonces $y_j = e^{\mu j}$ obteniendo, al reemplazar

$$e^{\mu j}\,[e^{2\mu} - r_1\,(e^{\alpha} + e^{-\alpha})\, e^{\mu} + 1] = 0$$

de donde

$$e^{\mu} = r_1\,\frac{e^{\alpha} + e^{-\alpha}}{2} \pm \sqrt{\frac{r_1^2}{4}\,(e^{\alpha} + e^{-\alpha})^2 - 1}$$

Pero en el caso correspondiente a la sucesión $\{x_j\}$, $r_1^2 < 1$ y, con exactitud, lím $r_1 = e^{-\alpha}\,\xi^{-1}$. Con n suficientemente grande se tendrá entonces $r_1 = e^{-\alpha}\,.\,\omega^{-1}$; ω difiriendo de ξ tan poco como se desee, de donde: $0 < \omega < 1$.

Luego el discriminante Δ que interviene en el valor de e^{μ} es:

$$\Delta = r_1^2 \left(\frac{e^{\alpha} + e^{-\alpha}}{2} \right)^2 - 1$$

o sea

$$e^{-2\alpha}\,\omega^2 \frac{(e^{\alpha} + e^{-\alpha})^2}{4} - 1$$

y será entonces $\Delta < 0$ si

$$\frac{\omega^2}{4}\,(1 + e^{-2\alpha})^2 < 1$$

o sea

$$e^{-2\alpha} < \frac{2}{\omega} - 1\,.$$

Pero esta desigualdad se cumple desde que, por hipótesis, era $e^{-2\alpha} \leq 1$. Luego se tendrá:

$$e^{\mu} = \frac{r_1}{2}\,(e^{\alpha} + e^{-\alpha}) \pm i \sqrt{1 - \left\{ \frac{r_1}{2}\,(e^{\alpha} + e^{-\alpha}) \right\}^2}$$

con lo cual resulta

$$y_j = C_1\, e^{\mu_1 j} + C_2\, e^{\mu_2 j}$$

o sea

$$y_j = C_1 \left[\frac{r_1}{2}\,(e^{\alpha} + e^{-\alpha}) + i \sqrt{1 - \left\{ \frac{r_1}{2}\,(e^{\alpha} + e^{-\alpha}) \right\}^2} \right]^j +$$

$$+ C_2 \left[\frac{r_1}{2}\,(e^{\alpha} + e^{-\alpha}) - i \sqrt{1 - \left\{ \frac{r_1}{2}\,(e^{\alpha} + e^{-\alpha}) \right\}^2} \right]^j$$

Hagamos

$$\frac{r_1}{2}\,(e^{\alpha} + e^{-\alpha}) = \cos \varphi$$

se tendrá entonces

$$y_j = C_1\,[\cos j\,\varphi + i \operatorname{sen} j\,\varphi] + C_2\,[\cos j\,\varphi - i \operatorname{sen} j\,\varphi]$$

y como C_1 y C_2 son constantes arbitrarias se podrá tomarlas complejas en modo de obtener con A y B reales pero arbitrarias

$$y_j = A \cos j\,\varphi + \beta \operatorname{sen} j\,\varphi$$

o si se quiere, para destacar el período L haciendo $\varphi = \dfrac{2\,\pi}{L}$

$$y_j = A \cos \frac{2\,\pi}{L}\, j + B \operatorname{sen} \frac{2\,\pi}{L}\, j \qquad [S_1]$$

Recordemos al conjunto de las relaciones exactas, recordando que:

$$\alpha_{j+s} = \beta_{j+s}\,\sigma\,(y_{j+s-2})\,e^{(2-s)\,\alpha}$$

$$y_{j+2} = r_1\,(e^{\alpha} + e^{-\alpha})\,y_{j+1} - y_j + \sigma\,(y_j)\,\beta_{j+2}$$

$$y_{j+3} = r_1\,(e^{\alpha} + e^{-\alpha})\,y_{j+2} - y_{j+1} + \sigma\,(y_{j+1})\,\beta_{j+3}\,e^{-\alpha}$$

. . . . . .

$$y_{j+s} = r_1\,(e^{\alpha} + e^{-\alpha})\,y_{j+s-1} - y_{j+s-2} + \sigma\,(y_{j+s-2})\,\beta_{j+s}\,e^{-(s-2)\alpha}$$

Se ve cómo las y se van encadenando en modo que y_{j+s} recurre de los anteriores valores hasta venir a depender finalmente de y_j e y_{j+1}, pero adoptando un error que combinará a todos los errores parciales.

Sustituyendo y_{j+2} en y_{j+3} tendré una expresión de la forma

$$y_{j+3} = C_1^{(3)}\,y_{j+1} + C_0^{(3)}\,y_j + R_3$$

siendo

$$R_3 = \sigma\,(y_{j+1})\,\beta_{j+3}\,e^{-\alpha} + r_1\,(e^{\alpha} + e^{-\alpha})\,\sigma\,(y_j)\,\beta_{j+2}$$

y como era

$$\sigma\,(y_{j+1}) = \sigma\,(y_j)\,e^{\alpha}.$$

$$R_3 = \sigma\,(y_j)\,[\beta_{j+3} + r_1\,(e^{\alpha} + e^{-\alpha})\,\beta_{j+2}] = \sigma\,(y_j)\,\Lambda_3$$

Si en y_{j+4} llevo los valores y_{j+3}, y_{j+2} tendré:

$$y_{j+4} = C_1^{(4)}\,y_{j+1} + C_0^{(4)}\,y_j + R_4$$

con

$$R_4 = \sigma(y_j)\,[\beta_{j+4} + r_1\,(e^{\alpha}+e^{-\alpha})\,\beta_{j+3} + \{r_1^2\,(e^{\alpha}+e^{-\alpha})^2 - 1\}\,\beta_{j+2}] = \sigma(y_j)\,\Lambda_4$$

$$\Lambda_4 = \beta_{j+4} + r_1\,(e^{\alpha} + e^{-\alpha})\,\beta_{j+3} + \{r_1^2\,(e^{\alpha} + e^{-\alpha})^2 - 1\}\,\beta_{j+2}$$

que escrito bajo esta forma

$$\Lambda_4 = a_0^{(4)}\,\beta_{j+4} + a_1^{(4)}\,\beta_{j+3} + a_2^{(4)}\,\beta_{j+2}$$

nos muestra que

$$a_0^{(4)} = 1$$

$$a_1^{(4)} = r_1\,(e^{\alpha} + e^{-\alpha})$$

$$a_2^{(4)} = |a_1^{(4)}|^2 - a_0^{(4)}$$

Esta propiedad es permanente, de modo que, en un

$$y_{j+s} = C_1^{(s)}\,y_{j+1} + C_0^{(s)}\,y_j + \sigma\,(y_j)\,\Lambda_s$$

se tendrá

$$\Lambda_s = a_0\,\beta_{j+s} + a_1\,\beta_{j+s-1} + \ldots + a_{s-2}\,\beta_{j+2}$$

siendo

$$a_0 = 1$$

$$a_1 = r_1\,(e^{\alpha} + e^{-\alpha})$$

y los demás coeficientes tales que

$$a_k = r_1\,(e^{\alpha} + e^{-\alpha})\,a_{k-1} - a_{k-2}$$

La solución de esta ecuación recurrente, por lo visto antes, será:

$$a_k = C\cos\frac{2\pi}{L}k + D\,\mathrm{sen}\,\frac{2\pi}{L}k \qquad [S_2]$$

con

$$\cos\frac{2\pi}{L} = \frac{r_1}{2}\,(e^{\alpha} + e^{-\alpha})$$

Se nos han presentado así dos sinusoides. Una es la $[S_1]$ de y_j determinada totalmente por los dos puntos iniciales y_j e y_{j+1}.

Es evidente que en la

$$y_{j+s} = C_1\, y_{j+1} + C_0\, y_j + \sigma\,(y_j)\,\Lambda_s$$

la $C_1\, y_{j+1} + C_0\, y_j$ es la ordenada de $[S_1]$, la cual será obtenida de $y_{j+2} = r_1\,(e^{\alpha} + e^{-\alpha})\, y_{j+1} - y_j$ por sustituciones sucesivas. El desvío de y_{j+s} respecto a la sinusoide $[S_1]$ es, pues, $\sigma\,(y_j)\,\Lambda_s$, donde

$$\Lambda_s = a_0\,\beta_{j-s} + \ldots + a_{s-2}\,\beta_{j+2}$$

y los coeficientes a_0, a_1, a_2, $\ldots$ a_{s-2} son las ordenadas de la segunda sinusoide $[S_2]$.

Si en $[S_2]$ hago $k = 0$ y luego $k = 1$ obtengo:

$$a_0 = C = 1$$

$$a_1 = a_0 \cos\frac{2\,\pi}{L} + D\,\operatorname{sen}\frac{2\,\pi}{L} = r_1\,(e^{\alpha} + e^{-\alpha})$$

de donde, como era:

$$\cos\frac{2\,\pi}{L} = \frac{r_1}{2}\,(e^{\alpha} + e^{-\alpha})$$

tendré

$$r_1\,\frac{e^{\alpha} + e^{-\alpha}}{2} + D\left[1 - \left(r_1\,\frac{e^{\alpha} + e^{-\alpha}}{2}\right)^2\right]^{1/2} = r_1\,(e^{\alpha} + e^{-\alpha})$$

Luego

$$D = \frac{r_1\,(e^{\alpha} + e^{-\alpha})/2}{\left[1 - \left(r_1\,\dfrac{e^{\alpha} + e^{-\alpha}}{2}\right)^2\right]^{1/2}}$$

con lo cual nos quedará

$$a_k = \cos\frac{2\,\pi}{L}\,k + \frac{r_1\,(e^{\alpha} + e^{-\alpha})/2}{\left[1 - \left(r_1\,\dfrac{e^{\alpha} + e^{-\alpha}}{2}\right)^2\right]^{1/2}}\,\operatorname{sen}\frac{2\,\pi}{L}\,k$$

La amplitud de esta sinusoide es

$$\sqrt{\frac{1}{1 - \left(r_1\,\dfrac{e^{\alpha} + e^{-\alpha}}{2}\right)^2}}$$

Se sigue de ello que cada uno de los coeficientes a de la suma

$$\Lambda_s = a_1 \beta_{j+s} + a_1 \beta_{j+s-1} + \ldots + a_{s-2} \beta_{j+2}$$

está superiormente acotado por la anterior amplitud. Por ello y por la propiedad de los β se sigue que $\Lambda_s \to 0$. Las y_j se disponen así sobre $[S_1]$ en la misma forma como $\Lambda_s \to 0$ o sea los β, es decir, con una probabilidad que tiende a la unidad.

Referencias

(1) E. Slutzky. — *The sumation of random causes as the source of cyclic processes. Econometrica.* Vol. 5, N° 2, Abril 1937. Traducc. al inglés del original publicado en ruso en 1927.
E. Slutzky. — *Uber stochastische Asymptoten und Grenzwerte. Metron.* Vol. 5, 1925.

(2) V. Romanovsxy. — *Sur la loi sinusoidale limite. Rendic. Circolo Matemático di Palermo.* 1932.

(3) V. Romanovsxy. — *Sur une generalisation de la loi sinusoidale limite. Rend. Circ. Matem. Palermo.* 1933.

(4) G. Darmois. — *Analyse et comparaison des series statistiques qui se développent dans le temps. Metron.* Vol. VIII. 1929.

(5) G. Polya y G. Szego. — *Aufgaben und Lehrsatze.* T. 1., pág. 77. Springer, Berlín.

(6) R. H. Fowler. — *Statistical Mechanics.* Cambridge, 1929, pág. 27.
R. Bruce Lindsey. — *An Introduction to Physical Statistics.* Wiley, 1941, pág. 161.

(7) C. Dieulefait. — *Teoría de la Correlación.* Inst. Estadística. Fac. Cs. Económicas, Univ. Nacional Litoral. Rosario, 1935.

(Instit. Estadistica
Fac. Cs. Economicas
Rosario)

UN PERIODOGRAMA DE LAS LLUVIAS EN CORDOBA

POR

EMILIO L. DIAZ

SUMMARY

The author has made a periodograme of the smoothed data of rains at Cordoba, as a representative of the central Argentina precipitations. The observation lag runs from 1888 to 1940, that is to say 53 years.

He finds out 3 waves to reproduce the main oscillations of the smoothed curve (3 years movible average) that seems to have a acceptable fit up with the observed data. Nevertheless, the author thinks the record is too short to atempt to use it to forecast but to have a reference to the future.

Hemos elegido este punto para ser analizado como representativo de las lluvias en la región central argentina.

El registro de datos abarca 53 años, desde 1888 hasta 1940, obtenidos los anteriores a 1928 de la publicación « El Régimen pluviométrico de la República Argentina » de la Dirección de Meteorología, y los de los años 1931 a 1940 totalizando los datos publicados en la Carta del Tiempo.

Los valores anuales de la lluvia fueron sometidos a un proceso de suavización mediante la aplicación de la media móvil de 3 valores consecutivos. En esta forma se obtuvo una curva que representa la evolución de las precipitaciones y que define muy bien los períodos secos y lluviosos. Ha sido dibujada en la figura 3.

Los mencionados valores fueron analizados mediante un periodograma, distribuyéndolos en un número variable de columnas y efectuando los promedios. La figura 1 muestra un resumen del mismo, los puntos han sido unidos por una curva; siendo las abcisas, los diferentes períodos (en años) y las ordenadas, las distintas amplitudes registradas. Puede verse allí que la curva presenta tres picos,

cada uno de los cuales corresponde a un período probable en los

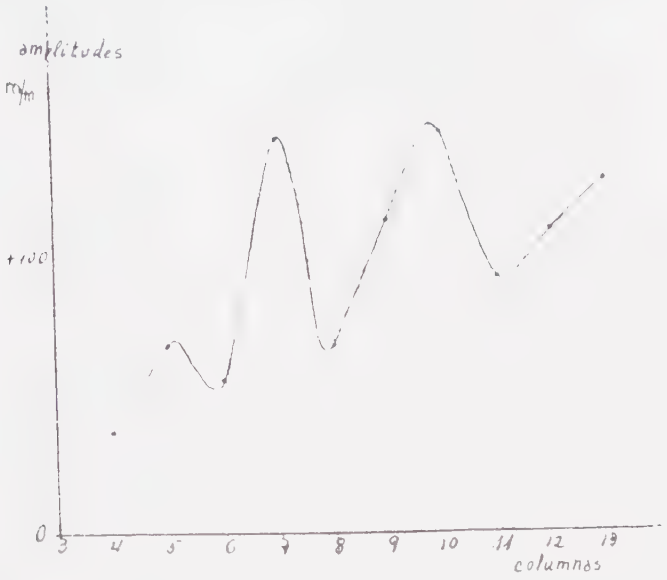


FIG. 1.

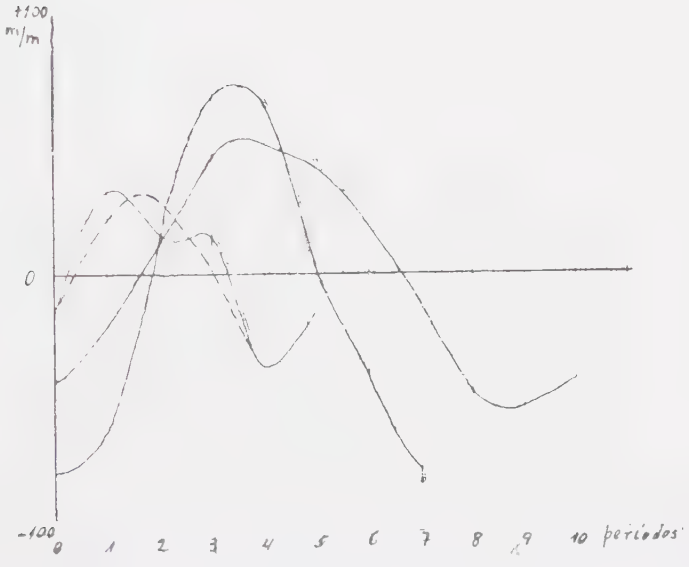


FIG. 2.

datos de la observación. Estos períodos son: 5,1 años; 7,05 y 9,8 años.

Con el fin de deducir gráficamente las constantes de esas ondas probables, se dibujaron las curvas correspondientes a dichas ondas (fig. 2) deduciéndose en esta forma la constante de fase y amplitud.

A continuación damos un pequeño cuadro con el resumen de estos valores:

$$T_5 = 5{,}1 \text{ años } \omega_5 = \frac{360^\circ}{5.1} = 70^\circ 6\ \varphi_5 = -23^\circ\ E_5 = 36 \text{ mm.}$$

$$T_7 = 7{,}05 \text{ años } \omega_7 = \frac{360^\circ}{7{,}05} = 51^\circ 1\ \varphi_7 = -84^\circ\ E_7 = 78 \text{ mm.}$$

$$T_{10} = 9{,}8 \text{ años } \omega_{10} = \frac{360^\circ}{9.8} = 36^\circ 7\ \varphi_{10} = -61^\circ\ E_{10} = 53 \text{ mm.}$$

De donde la expresión de la fórmula periódica resulta:

$$X = 36 \operatorname{sen}(70^\circ 6.t - 23^\circ) + 78 \operatorname{sen}(51^\circ 1.t - 84^\circ) + 53 \operatorname{sen}(36^\circ 7.t - 61^\circ)$$

donde X es el apartamiento con respecto a la normal.

t = en años (para 1888 $t = 1$).

Debemos hacer notar, antes de seguir adelante, que el valor de la media anual de lluvias en Córdoba, que da la ya mencionada publicación de la Dirección de Meteorología, se alteró al introducir los valores observados en el intervalo 1931 a 1940, siendo en la actualidad de 708,4 milímetros, en lugar de 716,8 que da la publicación.

Se procedió entonces a determinar año por año, las desviaciones de los valores de la media móvil con respecto a la nueva normal. Con estos apartamientos, y con los deducidos mediante la fórmula periódica, se efectuó un cálculo de correlación simple a fin de investigar hasta qué grado la fórmula periódica encontrada, ajusta con la observada.

A continuación damos el resumen de dicho cálculo:

$$\begin{aligned} \Sigma\, x\, y &= +248285 \\ \Sigma\, x &= +332 \\ \Sigma\, y &= 0 \\ \Sigma\, x^2 &= 267196 \\ \Sigma\, y^2 &= 414954 \\ N &= 47 \end{aligned}$$

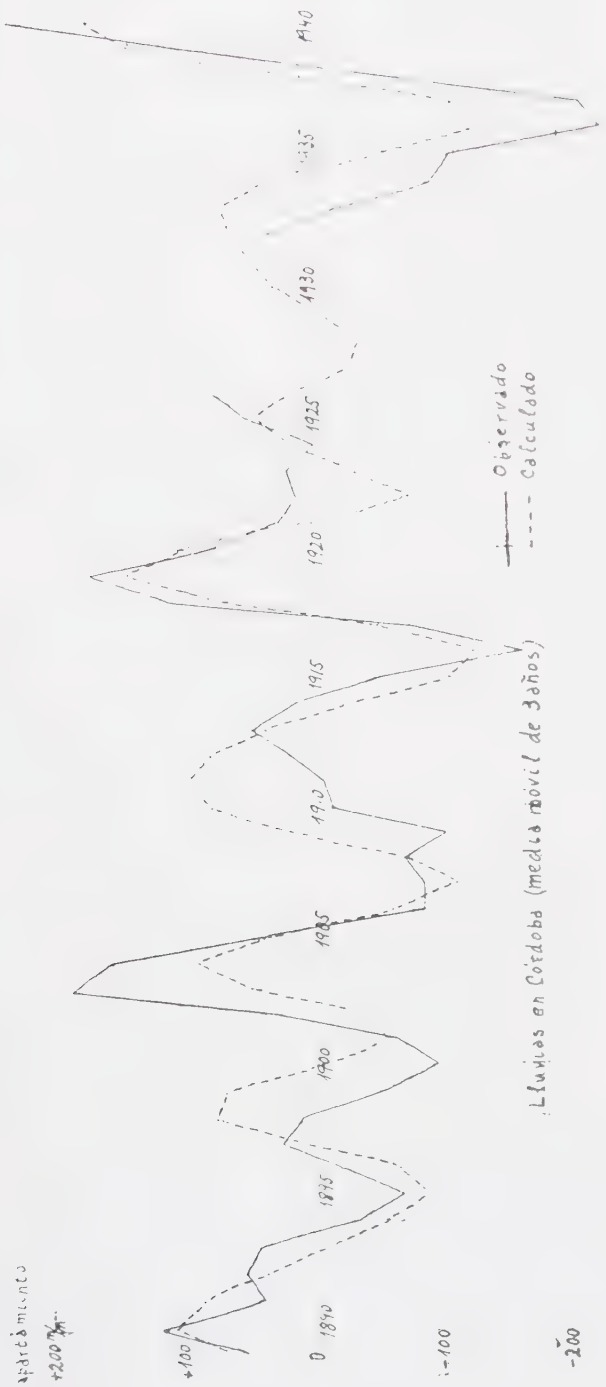

Apartamiento
+200 %
+100
0 1870
-100
-200
1875
1900
1905
1915
1920
1925
1930
1935
1940
Lluvias en Córdoba (media móvil de 3años)
Observado
Calculado

Fig. 3.

CUADRO I

RESUMEN DEL PERIODOGRAMA

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	Amplitud
	711	690	711	727										37
	740	724	722	672	693									68
	678	703	726	734	728	684								56
	649	723	776	774	708	670	632							144
	722	701	704	712	702	677	717	746						69
	699	667	686	673	692	719	760	782	721					115
(1)	720	735	768	722	734	759	713	676	621	652				147
	722	693	705	705	720	708	674	669	763	746	724			94
	663	680	738	772	774	707	703	732	710	686	682	666		111
	776	717	753	747	778	745	690	652	649	655	652	689	732	129

(1) En la figura 2 se han dibujado los valores de período 10 años menos los de 5 años a fin de eliminar la influencia de esta última onda.

La fórmula de ligazón entre x e y que se aplicó era del tipo:

$$y = a + bx \pm \sigma$$

Donde:

y : apartamiento observado.

x : apartamiento calculado.

a : constante.

b : factor de regresión.

σ : error cuadrático medio.

De donde se obtuvo:

$$a = -7 \text{ mm.}$$

$$b = +0{,}94$$

Y aplicando el cálculo de correlación:

$$r^2 = \frac{b \Sigma (x\,y)}{\Sigma y^2} \Big| = 0{,}56$$

$$r = +0{,}75$$

$$\sigma^2 = \frac{\Sigma y^2 - b \Sigma (x\,y)}{N} \qquad 3863$$

$$\sigma = \pm 62 \text{ mm.}$$

El ajuste de la fórmula periódica determinada puede considerarse bueno, dado que el valor del coeficiente r es bastante alto $(+0{,}75)$, y que el error cuadrático medio $(\pm 62$ mm.) representa un 14 % de la máxima amplitud registrada en los datos observados, que es de aproximadamente 450 mm.

La fórmula anterior queda entonces:

$$y = -7 + 0{,}94\ x \pm 62$$

De acuerdo a las propiedades del error cuadrático, el valor ± 62 mm. significa que aproximadamente el 70 % de los valores observados caen dentro de dicho apartamiento, con respecto a las desviaciones calculadas con la fórmula periódica e introducidas en la anterior.

A los fines de la interpretación de los datos proporcionados por el periodograma, debemos hacer notar que las lluvias anuales tienen un apartamiento medio de 93 milímetros con respecto a la media móvil. La curva trazada con las medias móviles define con mucha nitidez las épocas secas y lluviosas, la fórmula periódica determinada para reproducir los valores obtenidos de la observación es solo aplicable a esta característica del clima.

La tarea de tratar de reproducir los valores anuales, es más difícil. Las tormentas de verano siguen un curso bastante variable, la influencia de sus precipitaciones se refleja directamente en los datos y puede, llegado el caso, inducir a error por falseamiento de esos mismos datos. Mediante la media móvil de 3 años, se trató de eliminar en lo posible la influencia de estas circunstancias fortuitas a fin de obtener una curva que representara en forma más veraz, la realidad de las variaciones de precipitación.

En lo que se refiere al empleo de la fórmula calculada a efectos de previsión (extrapolación de la fórmula), será necesario comparar lo que se observe con lo que ella de. Sin embargo, es bueno hacer notar que, para los períodos largos, el número de valores que intervienen en los promedios de columnas del periodograma es todavía escaso. En efecto, si tomamos la onda de período 10 años, el número de valores por columnas es de 5, lo que equivale a decir, que si se agrega un sexto dato que difiriera en 200 milímetros con el promedio, este último se modificaría variando 33 milímetros, cantidad muy apreciable si se tiene en cuenta que la amplitud es de 101.

Puerto Belgrano, 1º de Junio de 1942.

INVESTIGACION DE BACTERIAS COLIFORMES EN EL AGUA. MODIFICACIONES AL MEDIO DE MAC CONKEY *

POR EL

DR. RAMON H. LEIGUARDA

INTRODUCCION

ANTECEDENTES DE LOS MEDIOS CON BILIS Y DEL CALDO DE MAC CONKEY

Los medios de enriquecimiento para análisis bacteriológico del agua pueden clasificarse en dos grandes grupos. Uno en el cual se encuentran aquellos que permiten el desarrollo de todas las bacterias, sean éstas del grupo coli-aerógenes o no. Y otro que comprende a los que poseen substancias que inhiben el desarrollo de las bacterias que fermentan la lactosa y que no tienen significado en la apreciación del valor sanitario del agua.

Dentro del primer grupo, el más importante es el caldo lactosado, que se emplea como medio de enriquecimiento en el método de la Asociación Americana de Salud Pública. La causa principal por la que no satisface el caldo lactosado es que da un gran porcentaje de tubos falsos positivos que aumentan innecesariamente la tarea y el consumo de material.

Al segundo grupo corresponden una serie de medios cuyo poder inhibidor se debe a la acción de colorantes, como el caldo lactosado con azul de metileno y bromo cresol púrpura (Dominik y Lauter, 1929), el caldo lactosado con cristal violeta (Salle, 1930), y el caldo lactosado con fucsina (Ritter, 1931); o de otras substancias,

* El autor manifiesta su agradecimiento al Dr. Rogelio A. Trelles, jefe de los Laboratorios de Obras Sanitarias de la Nación, y al Dr. Raúl Ferramola, jefe de la sección «Microbiología» de los mismos, por haber permitido y dirigido la realización de este trabajo.

como el caldo lactosado con bilis (Mac Conkey, 1908), el caldo lactosado con bilis y verde brillante (Jordan, 1927) y el caldo con formatos y ricinoleatos (Stark y England, 1933).

Los medios con bilis han sido objeto de profundo estudio a partir del año 1900 en que Mac Conkey empleó taurocolato de sodio comercial para la diferenciación del B. coli y del B. typhosus en las heces.

Mac Conkey y Hill ([1]), en 1901, usaron este medio con gran éxito para el aislamiento de bacterias de líquidos cloacales.

Jackson ([2]), en 1907, como resultado de un estudio efectuado con cinco mil muestras de agua sembradas en un medio biliado, llegó a la conclusión de que la acción inhibidora de la sal de bilis era selectiva pues favorecía el crecimiento y reproducción del B. coli, retardaba el crecimiento de ciertos estreptococos y mataba la mayoría de otras especies que se desarrollan a 37°C.

Hale y Melia ([3]), en 1910, encontraron que la sal de bilis en el caldo lactosado con bilis causaba un grado apreciable de inhibición en el desarrollo de los B. coli que era más notorio cuando estaban atenuados; pero, que también daba un número mayor de ensayos presuntivos reales para B. coli que cualquier otro medio conocido.

Jackson y Muer ([4]), en 1911, observaron que todas las especies del grupo coli producían gas en el caldo con lactosa y bilis, mientras que otras bacterias que normalmente fermentan la lactosa no lo hacían en estas condiciones, a excepción del B. welchii que se puede distinguir fácilmente del B. coli por examen microscópico.

Además mostraron que dicho caldo era ligeramente inhibidor sólo para formas atenuadas de B. coli, de modo que la mayoría de los ensayos positivos indicaban contaminación reciente del agua.

Jordán ([5]), en 1913, llegó a la conclusión de que la bilis inhibe de un tercio a un medio de los B. coli presentes, provenientes tanto de cultivos recientes como de cultivos viejos, y por lo tanto, su uso siempre implica la supresión de un cierto número de bacterias coliformes.

Obst ([6]), en 1916, prefirió el caldo lactosado standard al caldo con lactosa y bilis, por la dificultad en encontrar bilis fresca de composición uniforme y porque la bilis estacionada se deterioraba progresivamente perdiendo calidad.

Bunker ([7]), en 1916, mostró que un medio compuesto por 1 % de peptona, 1 % de lactosa y de 2 a 5 % de bilis seca, era en la

mayoría de los casos, más seguro que el caldo de lactosa standard para la determinación de microorganismos intestinales.

Salter ([8]), en 1919, hizo notar la importancia que tiene la concentración de la sal de bilis en el medio, pues 0,5 % estimulaba el desarrollo del B. coli communis mientras que concentraciones mayores, por ejemplo de 1 %, tenían un marcado efecto inhibidor sobre el mismo.

Muer y Harris ([9]), en 1920, demostraron la mayor sensibilidad de un medio conteniendo 5 % de bilis de buey seca, sobre otro con un 10 %.

Levine ([10]), en 1921, observó que las sales biliares estimulaban el crecimiento del B. coli cuando la concentración era menor que 0,5 %, pero, mostraban un marcado efecto inhibidor si la concentración subía del 0,7-1 %.

El mismo Levine ([11]), en 1922, hizo experiencias con taurocolato de sodio « Merk » y bilis evaporada « Difco », estableciendo que las concentraciones óptimas de taurocolato para B. coli oscila entre 0,5 y 0,75 % y para B. aerógenes es de 0,75 %. Para la bilis evaporada « Difco » las concentraciones óptimas son: para el B. coli 1-2 % y para B. aerógenes 1 %. Para el B. coli 5 % no es perjudicial, mientras que para el B. aerógenes concentraciones mayores al 1 % inhiben su desarrollo.

Winslow y Dollof ([12]), en 1922, observaron que la producción de gas era mayor en el caldo lactosado con bilis que en el caldo lactosado « standard » en cualquier pH.

D. R. y Et. R. ([13]), en 1923, recomendaron el medio de bilis con motivo de su sensibilidad y la comodidad con que se puede emplear. Indicaron tres medios biliados, entre ellos el de Mac Conkey.

Cunningham y Raghavachari ([14]) y ([15]), en 1924 y 1926, y Raghavachari en 1926 afirmaron que el caldo de Mac Conkey era el más favorable para el aislamiento de las bacterias coliformes de las heces, la tierra, la leche y el agua.

Dunham ([16]), en 1925, observó que la bilis evaporada puede estimular o no el crecimiento de las bacterias del grupo coli según sea la concentración y la reacción del medio; que las distintas muestras de bilis no presentan el mismo poder inhibidor y que en caldo lactosado el crecimiento máximo era en pH 6,1, mientras que en un caldo lactosado con bilis el pH óptimo oscilaba entre 7,3 y 7,8

Cameron ([17]) y Ey ([18]), en el año 1930, efectuaron separadamente

dos trabajos comparativos entre el caldo lactosado con y sin bilis. Cameron estableció la superioridad del caldo lactosado con bilis mientras que Ey obtuvo una pequeña ventaja con el caldo lactosado.

Ruchhoft [19], estudiando un medio « buffer » con 2 % de bilis y pH 7,6-7,8, encontró que era muy bueno en cuanto a selectividad pero pobre en sensibilidad.

Gettrust y Hostettler [20], en 1930 y 1931, efectuaron un ensayo comparativo entre un caldo lactosado con bilis y el lactosado standard, empleando aguas de cinco plantas de purificación, y llegaron a la conclusión de que el caldo lactosado con bilis era más sensible y selectivo, ya que daba un porcentaje mayor de tubos positivos confirmados y muy pocos tubos falsos positivos.

Poe [21], en 1938, estableció que la mejor concentración de bilis para el crecimiento de las bacterias del grupo coli-aerógenes es alrededor de 6-7 % y recomendó el pH 7. Además observó que la clase de la bilis empleada no tenía influencia alguna.

El caldo de Mac Conkey [22] interesa especialmente por ser el medio de enriquecimiento con bilis más antiguo, y el más empleado en el examen sanitario del agua, ya que es el medio que se usa en el Método del Ministerio Británico de Salud y en el de Wilson, actualmente muy difundido gracias a sus múltiples ventajas.

La fórmula original de dicho caldo, data del año 1908 y es la siguiente:

Taurocolato de sodio	5 g.
Glucosa	5 g.
Peptona	20 g.
Agua	1.000 ml.
Tornasol (solución).	

Más tarde el Metropolitan Water Board sustituyó la glucosa por lactosa porque la primera es fermentada por un gran número de microorganismos cuya presencia en el agua no indica contaminación. La fórmula establecida fué la siguiente:

Taurocolato de sodio	5 g.
Lactosa	10 g.
Peptona	20 g.
Agua	900 ml.
Tornasol (sol. al 0,5 %)	100 ml.

Savage ([23]) había propuesto sustituir el tornasol por el rojo neutro, no sólo porque es un indicador más satisfactorio de la fermentación ácida, sino también porque muchos organismos coliformes producen una fluorescencia típica en un medio con lactosa o glucosa que lo contenga. Esta modificación fué aceptada por el Ministerio Británico de Salud, el cual en el Report nº 71 recomendó la fórmula:

Taurocolato de sodio	5 g.
Lactosa	10 g.
Peptona	20 g.
Cloruro de sodio	5 g.
Agua destilada	1.000 ml.
Sol. rojo neutro al 1 %	10 ml.

Esta es la fórmula que actualmente se emplea, ajustada a pH 7,4 y pudiéndose sustituir el taurocolato de sodio comercial por Bacto Oxgall « Difco ».

Las dos propiedades fundamentales que deben tenerse en cuenta para juzgar un medio de enriquecimiento para análisis de agua, son sensibilidad y selectividad. El medio ideal sería aquel que, revelando la presencia de todas las bacterias del grupo coli-aerógenes existentes en la cantidad de agua sembrada, impida el desarrollo de cualquier otro microorganismo que fermente la lactosa.

El medio reconocido como más sensible es el caldo lactosado, por lo cual suele tomarse como base en trabajos comparativos para apreciar el valor de los demás, pero su sensibilidad no es total, sobre todo cuando se trabaja con aguas que contienen microorganismos que pueden impedir el desarrollo de las bacterias del grupo coli-aerógenes o, provocar la muerte de las mismas antes de que produzcan gas. Uno de estos casos posibles de interferencia es el estudiado por Norton y Barnes ([24]), que observaron que el Cl. welchii cuando se encuentra en caldo lactosado junto con B. coli, causa una rápida producción de ácido y gas. Y cuando la acidez alcanza un pH de 4,2-4,3 en 24 horas el reconocimiento del B. coli es incierto, pues no soporta esa acidez al cabo de las 48 horas de incubación.

Varios trabajos comparativos entre el caldo lactosado y el de Mac Conkey se han realizado en distintos países y las conclusiones a que permitieron llegar los mismos no son en general concordantes.

Raghavachari y Seetharama Iyer ([25]), empleando la fórmula del caldo de Mac Conkey adoptada por Clemesha, y trabajando con aguas de ríos, de galerías de infiltración, de lagos, y con aguas filtradas y cloradas, obtuvieron los resultados indicados a continuación:

Nº DE MUESTRAS	CALDO DE MAC CONKEY			CALDO LACTOSADO		
	TUBOS PRESUNTIVOS +	TUBOS CONFIRMADOS		TUBOS PRESUNTIVOS +	TUBOS CONFIRMADOS	
		TOTALES	%		TOTALES	%
86	67	67	100	74	60	81

en base a los cuales y a otras determinaciones, afirmaron que el caldo de Mac Conkey es el medio de elección en la rutina de la bacteriología de aguas por: 1) es muy sensible y selectivo en su acción; 2) estimula el crecimiento de las formas coli-aerógenes, particularmente de las primeras en las 24 horas iniciales); 3) permite un conocimiento seguro de la contaminación 24 horas después de sembrada la muestra y sin necesidad de una confirmación posterior; 4) se ha encontrado que revela la presencia del B. coli en el 85 % de los tubos presuntivos positivos en 24 horas mientras que el caldo lactosado sólo lo hace en un 71 %.

Farrel ([26]), trabajando con cultivos puros de bacterias del grupo coli-aerógenes y con diluciones muy altas, estableció que el caldo de Mac Conkey inhibe el desarrollo de un 15 % de las bacterias nombradas, comparándolo con el caldo lactosado.

MEDIO DE CULTIVO	TOTAL DE TUBOS +	% CON RESPECTO AL CALDO LACTOSADO
Caldo lactosado standard	170	100
Caldo de Mac Conkey preparado de acuerdo a la fórmula original de 1908 . . .	145	85

Además observó que no existe diferencia cuando el número de microorganismos presentes es mayor de 4 por ml. También estudió el poder inhibidor del caldo de Mac Conkey para los esporulados que a menudo son responsables de la producción de gas, para lo

cual empleó cultivos puros de varios aerobios y anaerobios y obtuvo los siguientes datos:

MEDIO DE CULTIVO	TUBOS POSITIVOS		% CON RESPECTO AL CALDO LACTOSADO	
	ANAEROBIOS	AEROBIOS	ANAEROBIOS	AEROBIOS
Caldo lactosado	31	65	100	100
Caldo de Mac Conkey . . .	10	0	32,2	0

Atkinson y Wood ([27]), en Australia, basándose en el siguiente estudio sobre 34 muestras de aguas no tratadas

MEDIO DE CULTIVO	NÚMERO DE TUBOS +	Nº DE TUBOS CONFIRMADOS	
Caldo lactosado standard	305	247	Diferencia 42 %
Caldo de Mac Conkey	216	174	

calificaron al caldo de Mac Conkey como un medio poco sensible para el grupo de las bacterias coliformes y que da un número elevado de tubos falsos positivos.

Mac Crady ([28]), publicó los siguientes datos de una comparación experimental efectuada con aguas de New York, Toronto, Maryland y Quebec.

NÚMERO DE MUESTRAS	CALDO DE MAC CONKEY			CALDO LACTOSADO		
	TUBOS +	TUBOS CONFIRMADOS	%	TUBOS +	TUBOS CONFIRMADOS	%
221	851	631	74,1	1.070	643	60,1

(El número de tubos positivos y confirmados sólo es 1,9 % menor en el caldo de Mac Conkey).

El autor llegó a la conclusión que el juzgar un tubo positivo sólo por la aparición de gas dentro de las 48 horas no es correcto,

porque el caldo de Mac Conkey da un gran número de tubos falsos positivos.

Ferramola ([29]), comparando el método americano « standard » con el de Wilson, con aguas profundas y superficiales sin tratamiento y cloradas obtuvo los datos finales que siguen:

NÚMERO DE MUESTRAS	CALDO LACTOSADO			CALDO DE MAC CONKEY		
	TUBOS +	TUBOS CONFIRMADOS	%	TUBOS +	TUBOS CONFIRMADOS	%
499	1238	356	29	423	373	88

La diferencia a favor del caldo de Mac Conkey en tubos positivos y confirmados es de 4,55 %.

Alrededor del 80 % de los tubos falsos positivos debíanse a bacterias coliformes que no fermentaban lactosa en las placas de eosina-azul de metileno dentro de las 24 horas. El autor consideró probable que dichos organismos fueran en realidad bacterias coliformes cuya propiedad de fermentar la lactosa hubiera sido modificada por las condiciones no favorables del transporte o por la acción del cloro en los provenientes de aguas cloradas. Según comunicación personal, el examen microscópico de estas colonias atípicas en agar eosina azul de metileno, correspondía a bacterias Gram negativas morfogólicamente iguales al B. coli y que fermentaban lactosa tardíamente (48-96 horas).

De los cinco trabajos mencionados el de Raghavachari y Seetharama Yyer y el de Ferramola dieron resultados favorables para el caldo de Mac Conkey, pero los tres restantes lo critican por falta de sensibilidad o de selectividad. Es necesario tener en cuenta que los cinco estudios se efectuaron en distintas condiciones, ya que en unos se hizo con cultivos puros de bacterias coliformes y en otros, con aguas de diferentes tipos y lugares muy variados de extracción.

PARTE EXPERIMENTAL

INTRODUCCIÓN

En el presente trabajo se ha tratado de mejorar el caldo de Mac Conkey, aumentando la sensibilidad del mismo para las bacterias coliformes, la cual no es tan pronunciada como la del caldo lactosado, según algunos autores ya citados; y agudizando su selectividad, con el objeto de disminuir el porcentaje de tubos falsos positivos.

Para ello se ha ensayado variar el pH del medio, agregarle fosfatos, sustituir la peptona por triptona y probar la influencia de las distintas marcas de peptona.

Varios son las autores que se han referido a uno u otro de los factores citados.

Thompson ([30]), en 1927, recomendó dar poder regulador al caldo lactosado mediante el agregado de 2 gramos de PO_4HK_2 por litro, para eliminar los fermentadores falsos de lactosa.

Janzig y Montak ([31]), en 1928, disminuyeron en un 47 % la cantidad de ensayos falsos positivos aumentando el pH del caldo lactosado de 6,8 a 8,0.

Ruchhoft, Kallas y Ben Chinn ([32]), en 1931, observaron que los cultivos del grupo coli-aerógenes en caldo lactosado al cabo de 48 horas de incubación a 37°C, alcanzan un pH de 4,7-4,6 término medio; que no hay un desarrollo suficiente de las bacterias coliformes en caldo lactosado con pH = 4,8 como para que se produzca gas en 48 horas de incubación a 37°C y que algunas cepas mueren en estas condiciones. Trabajando con caldo lactosado con concentraciones variadas de PO_4HK_2, llegaron a la conclusión de que es evidente que la acción reguladora del fosfato acelera el crecimiento de las bacterias coliformes y también la producción de gas, lo cual facilita los métodos de rutina para análisis bacteriológico de agua.

Clark ([33]), en 1931, hizo ensayos paralelos con 114 muestras usando caldo lactosado de pH 6,8 y 8,1 y observó que no había diferencia apreciable en el número de tubos falsos positivos, pero que el caldo con pH 8,1 daba 11 % menos de tubos positivos y confirmados. (Ensayó 4 muestras menos que en el caldo con pH 6,8).

Cianci ([34]), en 1936, dedujo que se pueden alcanzar las condi-

ciones óptimas de desarrollo del B. coli y de fermentación de la lactosa, agregando al medio una cantidad apropiada de tampón de fosfatos de potasio de pH 6,8.

Darby y Mallmann ([35]), en 1939, encontraron que: *a*) el caldo lactosado con Bacto-triptosa es superior al caldo lactosado con Bacto-peptona para el desarrollo de E. coli; *b*) la concentración de 2 % de Bacto-triptosa da la mayor velocidad de reproducción durante el comienzo de la fase logarítmica de crecimiento; *c*) la adición de una mezcla « buffer » de fosfatos causa un desarrollo mucho más rápido en la parte final de la fase logarítmica de crecimiento y algo más rápido también durante el período estacionario inicial, que un medio sin sustancias reguladoras del pH; *d*) la velocidad de crecimiento durante la fase estacionaria inicial es mayor en un pH 6,8.

Ferramola ([36]), observó que el agregado de fosfatos a las muestras de agua prolongaba la supervivencia de las bacterias coliformes en las mismas, y que ese hecho no se debía a la acción « buffer » de los fosfatos sino que era una propiedad específica del ión fosfato.

(*Concluirá en el próximo número*)

BIBLIOGRAFIA

AUTORES VARIOS. — *Climate and man.* (El clima y el hombre). Yearbook of agriculture 1941. U. S. Department of Agriculture, 1 vol. 1428 pág., numerosos cuadros numéricos, mapas y figuras. Washington, D. C., 1941.

De acuerdo al criterio adoptado por el Departamento de Agricultura en los últimos años, el Yearbook de 1941 fué consagrado al estudio de la relación existente entre el clima y los muy diversos aspectos de las actividades agropecuarias.

Los distintos capítulos fueron desarrollados por autores de reconocido prestigio.

La obra consta de 85 capítulos, en realidad 85 verdaderos trabajos, a cada cual más interesante y valioso.

Con el sólo objeto de dar una somera idea del variado contenido de este excepcional conjunto de monografías de climatología aplicada, es suficiente enumerar, al azar, algunos de los capítulos de la obra:

— Los cambios climáticos a través de las edades geológicas.
— El clima y la colonización en Puerto Rico y las islas Hawai.
— La salud en los climas tropicales.
— El clima y el suelo.
— Efectos de los elementos climáticos en el desarrollo de las plantas.
— El clima y los cultivos forrajeros.
— El clima y los bosques de la Nación.
— El clima y las enfermedades de las plantas.
— El clima y la producción ganadera.
— Cómo se efectúa la predicción diaria del tiempo.
— Las bases científicas de la meteorología moderna.
— Valores meteorológicos extremos registrados en el mundo.
— Los climas del mundo.
— El clima del Estado de Arizona, Nevada, Texas, etc.

Considerando la totalidad del volumen, la bibliografía comprende centenares de obras, monografías y artículos. Como suele comprobarse en muchos libros norteamericanos, en este caso, también, son muy escasas las citas de publicaciones no editadas en inglés, resultando omitidos así, trabajos valiosos aparecidos en otras lenguas.

La obra finaliza con un índice alfabético muy detallado de autores y temas.

A. L. DE FINA.

Sección Pronóstico del Tiempo. — *Resumen Mensual del Tiempo.* Vol. 1, N° 1, enero de 1941. Dirección de Metereología, Geofísica e Hidrología. Buenos Aires, 1941.

Esta nueva publicación periódica viene a substituir al Resumen Mensual de la Carta del Tiempo que, la Dirección de Meteorología, publicó hasta hace aproximadamente diez años.

Se han introducido algunas modificaciones en la nueva serie del *Resumen Mensual,* ellas consisten en haber reemplazado, casi totalmente, los valores numéricos por mapas y gráficos y, además, en haber incluído un análisis de las masas de aire y los movimientos de sus respectivos frentes.

Asimismo, han sido agregadas representaciones del viento a varias alturas y las observaciones meteorológicas registradas en los buques.

Es de lamentar que no se representen, en forma cartográfica, las temperaturas máximas y mínimas extremas, tan importantes desde el punto de vista agropecuario.

A. L. De Fina.

Middleton, W. E. K. — *Meteorological instruments.* (Instrumentos meteorológicos). The University of Toronto Press. 1 vol., 213 páginas, 160 figuras. Toronto, Canadá, 1942.

Esta valiosa obra, sin duda alguna, será muy bien acogida por todos los cultores de la meteorología y climatología.

En efecto, los libros publicados acerca de la teoría, construcción, crítica, uso, contraste y exposición de los instrumentos meteorológicos, son sumamente escasos, tal es así que, hace 53 años que no se imprimía, en idioma inglés, una obra especializada de esta índole.

El libro comentado se halla escrito en estilo muy claro y profusamente ilustrado.

El volumen consta de los 10 capítulos siguientes:

I - Introducción. Propiedades de los instrumentos meteorológicos.
II - Medida de la presión atmosférica.
III - Medida de la temperatura en meteorología.
IV - Medida de la humedad atmosférica.
V - Medida de la precipitación y evaporación.
VI - Medida del viento cerca de la superficie.
VII - Medida de los vientos superiores por medio de globos pilotos.
VIII - Instrumentos para el estudio de la nubosidad.
IX - Registradores de la insolación.
X - Instrumentos para estudiar la alta atmósfera.

El autor de la obra es meteorólogo del Servicio Meteorológico del Canadá y además, profesor de la materia en la Universidad de Toronto.

A. L. De Fina.

Empleando cemento portland de alta calidad se obtiene mejor hormigón.

CEMENTO
SAN MARTIN
PORTLAND
INDUSTRIA ARGENTINA

CEMENTO PORTLAND
"INCOR"
ENDURECIMIENTO RAPIDO
INDUSTRIA ARGENTINA

Tanto el "SAN MARTIN", empleado a través de los años en millares de importantes construcciones, como el "INCOR", cuya alta resistencia inicial permite la pronta habilitación de las obras, responden a toda exigencia técnica para construír obras sólidas, seguras y permanentes.

CALIDAD — SERVICIO — COOPERACION

el hormigón dura más

COMPAÑIA ARGENTINA DE CEMENTO PORTLAND

RECONQUISTA 46 — BUENOS AIRES • SARMIENTO 991 — ROSARIO

COMPAÑIA DE SEGUROS

La Comercial e Industrial de Avellaneda

SOCIEDAD ANONIMA

Incendio **Cristales**

Avda. Mitre 429 (piso 1º) - Avellaneda — U. T. 22 - 7941 y 22 - 9138

EL COMERCIO

COMPAÑIA DE SEGUROS A PRIMA FIJA

MAIPU 53 - Bs. As. - U. T. 34, DEFENSA 2181

VIDA - INCENDIOS - AUTOMOVILES

MARITIMOS - CRISTALES - GRANIZO

Presidente: Ernesto Mignaquy *Gerente:* E. P. Bordenave

COMPAÑIA DE SEGUROS DE VIDA

SUD AMERICA

Av. R. SAENZ PEÑA 530 - BUENOS AIRES

La más poderosa y difundida en el país.

Seguros de Vida en vigor

$ 339.345.032 m/l.

Reservas Técnicas:

$ 54.369.767 m/l.

Pagados a Asegurados y Beneficiarios desde 1923:

$ 107.469.478 m/l.

CRISTALERIAS MAYBOGLAS

Sociedad de Responsabilidad Limitada

CAPITAL $ 1.000.000 m/n

•

MyB M. R.

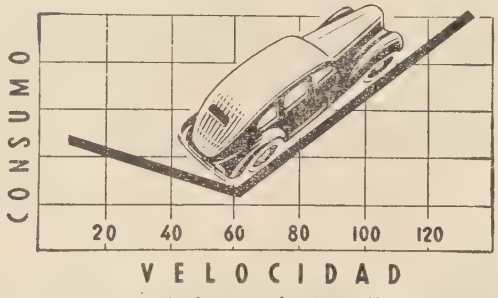
ENVASES DE VIDRIO - TUBOS DE VIDRIO

BLOQUES PARA PISOS Y TABIQUES

Escritorio:
Caseros 3121
U. T. 61-0212

Fabrica:
Tabaré 1630
U. T. 61-3800

Cómo "AHORRAR" combustible



Mantenga una velocidad económica. Piense que pasando los 60 km/h es considerable el aumento del consumo de nafta, de lubricante y del desgaste de neumáticos.

SHELL-MEX ARGENTINA LTD.

SHELL

Un consejo SHELL

CEMENTO PORTLAND
MARCA REGIST.
LOMA NEGRA
INDUSTRIA ARGENTINA

INDUSTRIA GRANDE
NACION PROSPERA

CEMENTO PORTLAND "LOMA NEGRA"
CEMENTO BLANCO "ACONCAGUA"
CAL HIDRATADA MOLIDA "CACIQUE"
AGREGADOS GRANITICOS

LOMA NEGRA S. A.
Moreno 1231 - Buenos Aires

FIRMES como la ROCA

PARA TODAS
SUS FUNDACIONES
Y EN CUALQUIER TERRENO

PILOTES FRANKI ARGENTINA
S. de R. Lda.

Administración:
Avda. Pte. ROQUE SAENZ PEÑA 788
BUENOS AIRES
U. T. 34 - Defensa 4811

COMPAÑIAS ARGENTINAS DE SEGUROS
"LA ESTRELLA" S. A. y "AMERICA"
PARA SUS BIENES ASEGURABLES, LES OFRECEN SUS AMPLIAS GARANTIAS
CIMENTADAS EN SU LARGA TRAYECTORIA DE VIDA ASEGURADORA

Teléfonos:
U. T. 31, 2747 - 2890 - 2727

471 - SAN MARTIN - 475
BUENOS AIRES

TALLERES

MARI

SOC. DE RESP. LTDA. PTE. LUIS SAENZ PEÑA 1835

Sucesores de ERNESTO MARI e Hijos - Fundador: ERNESTO MARI - Año 1886

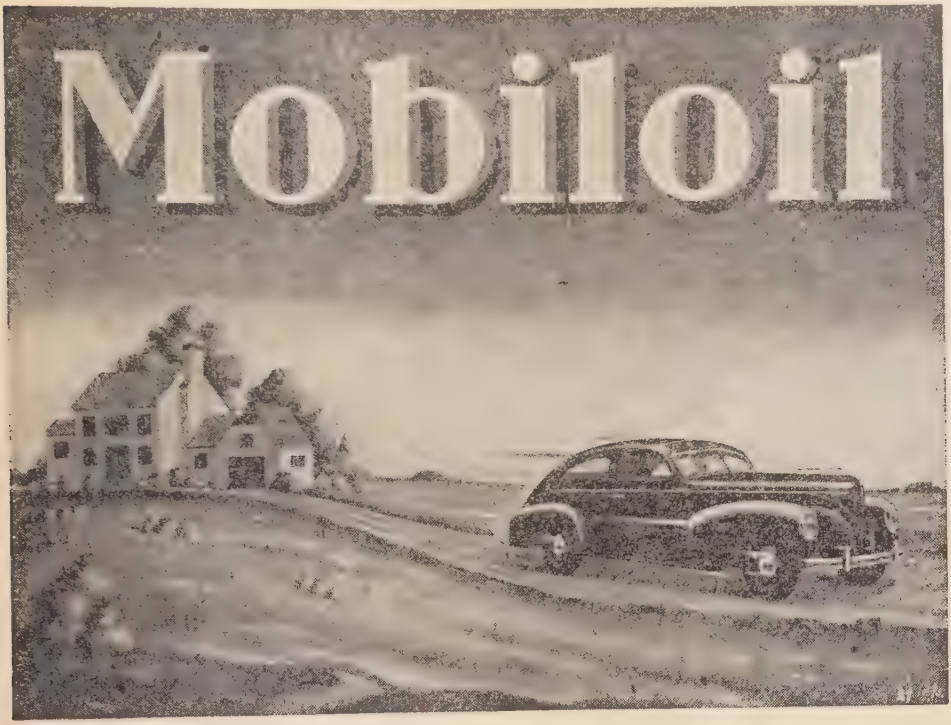
U. T. 23 - 0584 - 5327

TODA MAQUINA PARA LA CONSTRUCCION:

Moledoras - Mezcladoras - Hormigoneras - Guinches Giratorios - Baldes - Canastos, etc.
Elevadores de Materiales - Montacargas Eléctricos - Pescantes, plumas, plataformas, etc.

MECANICA EN GENERAL:

Cualquier Repuesto para Automóviles y para Máquinas Industriales.



COLUMBIA

SOCIEDAD ANONIMA DE SEGUROS

Secciones habilitadas:

- INCENDIO - AUTOMOVILES
- ACCIDENTES - MARITIMOS
- VIDA - CRISTALES

RIVADAVIA 409 BUENOS AIRES U. T. 33-8261 (Av.)

SOCIOS ACTIVOS

Abrines, Héctor Aníbal
Agostini, María Carmen
Aguilar, Félix
Aguirre Celiz, Julio
Albertoni, Juan L.
Albizzati, Carlos M.
Alessi, Juan M.
Alvarez de Toledo, Belisario
Allaria Amézaga, José A.
Allende Lezama, Luciano P.
Amoretti, Alejandro R.
Ancell, Carlos F.
Anchorena, Juan E.
André, Enrique de
Añón Suárez, Vicente
Aparicio, Francisco de
Aragón, José María
Arce, José
Arce, Manuel J.
Ardigó, Dante A.
Arena, Antonio
Arnaudo, Silvio J.
Auderut Barbeito, Arturo
Avila Méndez, Delfín
Bado, Atilio A.
Bachmann, Ernesto
Bagiletto, Eduardo E.
Balbiani, Atilio
Baliani, Luis M.
Bancalari, Agustín
Bandoni, Alfredo J.
Barabino Amadeo, S.
Bardin, Pablo P.
Barral Souto, José
Bazán, Pedro
Becke, Alejandro von der
Beordi, Manuel A.
Berjman, Elena
Berrino, Juan B.
Bertino, José Carlos
Bertomeu, Carlos A.
Besio Moreno, Nicolás
Bianchi, Domingo A. M.
Bianchi Lischetti, A.
Biggeri, Carlos
Blanchard, Everard E.
Blaquier, Juan
Blasco, José
Blaser, Florencio
Boaglio, Santiago
Böhtlingk, Heriberto
Bolognini, Héctor
Bonanni, Cayetano A.
Bonello, Roberto
Bontempi, Luis
Bordas, Alejandro F.
Bordenave, Pablo E.
Borzi, Ana María
Bosch, Gonzalo
Bosisio, Anecto J.
Bottaro, Juan C.
Bozzini, Luis (h.)
Briano, Juan A.
Brunengo, Pedro
Buich, Raúl
Bula, Clotilde A.
Buontempo, Guillermo
Burkart, Arturo
Busconi, Estela M.
Busso, Eduardo B.
Butty, Enrique
Buzzo, Alfredo
Caillet Bois, Teodoro
Canale, Humberto
Cánepa, Enrique P.
Capelli, Pedro F.
Capurro, Roberto H.
Carabelli, Juan José
Carbone, Esteban
Carbonell, José J.
Cárcova, Enrique de la
Cárdenas, Emilio F.
Carelli, Antonio
Carelli, Humberto H.
Caride Massini, Pedro
Carman, Ernesto
Carniglia, José
Casacuberta, Antonio
Casal, Pedro Segundo
Casale, Dante I.
Castellanos, Alberto
Castello, Manuel F.
Castiñeiras, Julio R.
Ceppi, Héctor
Cerri, Italo Américo
Clausen, Enrique G. E.
Clos, Enrique C.
Cock, Guillermo E.
Colina, Bartolomé de la
Colla, Ada Silvia
Coni Bazán, F. A.
Curti, Orlando P.
Curutchet, Luis
Chanourdie, Carlos C.
Chanourdie, Enrique
Chedufau, Edmundo C.
Chizzini Melo, Aníbal F.
D'Ascoli, Lucio
Damianovich, Horacio
Dassen, Rodolfo
Dasso, Ricardo L.
De Cesare, Elías A.
De Fina, Armando L.
De Nardo, Juan B.
Dennler, Jorge
Deulofeu, Venancio
Díaz, Emilio C.
Díaz, Emilio L.
Dickmann, Emilio
Dieulefait, Carlos E.
Di Tella, Torcuato
Doello-Jurado, Martín
Dobranich, Jorge W.
Domínguez, Juan A.
Duarte, Florentino, M.
Dubecq, Raúl E.
Dueñas, José
Duhau, Luis
Dupont, Enrique
Durañona y Vedia, A.
Durrieu, Mauricio
Escudero, Antonio
Escudero, Pedro
Faré, Santo S.
Farengo, Adolfo P.
Fernández, Alberto J.
Fernández Díaz, A.
Fernández, José S.
Fernández Long, S.
Fesquet Alberto E. J.
Figini, Angel
Figuerero, Hernando W.
Fiore, Luis
Fischer, Gustavo Juan
Flores, Emilio M.
Florit, Carlos J.
Fossa Mancini, E.
Frenguelli, Joaquín
Fürnkorn, Divico A.
Gadda, Carlos Manuel
Gaffuri, Domingo
Galmarini, Alfredo G.
Gando, Alfredo R.
Gandolfi Herrero, Augusto
Gandolfo, José S.
Gascón, Alberto
Gaspar, Fernando L.
Gatti, Alfredo B.
Gaviña Alvarado, Elías R.
Géneau, Carlos E.
Gerardi, Donato
Ghigliazza, Sebastián
Giagnoni, Bartolomé E
Giannone, José
Giusti, Leopoldo
González Beaussier, Carlos
González Domínguez, Alberto
González, Juan B.
Gorostiaga, Roberto
Gottschalk, Otto
Grieben, Arturo
Gutiérrez Acha, Alfredo
Gutiérrez, Ricardo J.
Herbin, Luis A.
Hermitte, Enrique
Herrera Vegas, M.
Herzer, Bernardo
Hickethier, Carlos F.
Hoebeke, Luis
Hofmann, Herbert
Houssay, Bernardo A.
Hoyo, Arturo
Igartúa, Luis María
Irigoyen, Luis H.
Isella, Carlos
Ivanissevich, Ludovico
Jauch, Clotilde
Jakob, Cristofredo
Jorge, José M.
Justo, Agustín P.
Kapus, Ervin E.
Kervor, Juan B.
Ketzelman, Federico
King, Diarmid O.
Kinkelin Pelletán, Eugenio de
Kinkelin Pelletán, J. C. de
Knoche, Walter
Krapf, Eduardo
Labarthe, Julio
Lagunas, Simón
La Menza, Francisco
Laplaza, Florián
Laporte, Luis B.
Larco, Esteban
Lasso, Alfredo F.
Latzina, Eduardo
Leguizamón Pondal, Martiniano
Levene, Julio C.
Liebermann, José
Ligniéres, Roberto
Limeses, José
Lizer y Trelles, C. A.
Lóizaga, Niceto S.
Lombardi, Alberto
López Sommaschini, Antonio J.
Loyarte, Ramón G.
Llauró, José
Magnin, Jorge
Mainini, Carlos
Mallol, Emilio
Mamberto, Benito
Manera, Edmundo
Marcó del Pont, E.
Marchionatto, Juan B.
Marseillán, Francisco
Martignone, Eduardo
Martini, Ardoino
Marotta, F. Pedro
Marotta, R. Armando
Mazza, Sigfrido C.
Méndez, Julio
Meoli, Gabriel
Meoli, Humberto
Mercau, Agustín
Meriggi, Juan C.
Mermoz, Francisco A.
Micheletti, José A.
Migone, Luis V.
Molfino, José F.
Molinari, Horacio J.
Molle, Clotilde C.
Montes, Vicente E.
Moragues Bernat, Jaime
Moreno, Evaristo V.
Morixe, José Bernabé
Mouchet, Enrique
Mulleady, Ricardo T.
Muratti, Natalio
Nágera, Juan José
Natale, Alfredo
Navarro Viola, Jorge
Negrete, Lucía
Negri, Mario L.
Noya, Rómulo M.
Nürnberg, Zacarías M.
Ogloblin, Alejandro
Olguín, Juan

Olivera, Carlos E.
Oliveri, Alfredo E.
Ortiz, Aníbal A.
Ortiz de Rosas, Jorge
Otamendi, Gustavo
Ottonello, Héctor
Ottonello, Néstor J
Páez, José María
Page, Franklin Nelson
Paitovi, y Oliveras A.
Palazzo, Pascual
Paquet, Carlos
Parel, Clovis A. M.
Parodi, Edmundo
Parodi, Lorenzo R.
Parodi, Raúl
Pastore, Franco
Paz Anchorena, José M
Penazzio, Oscar
Perazzo, Roberto J.
Pérez del Cerro, Carlos A
Pérez Hernández, A..
Pérez Martínez, Aníbal
Perrone, Cayetano
Pestalardo, Agustín
Pini, Aldo S.
Pistarelli, Julio A.
Plá, Cortés
Platz, Hubert
Polledo, César M.
Portillo, Gregorio A.
Posadas, Carlos
Puchulu, Juan F.
Puente, Francisco de la
Quinos, José Luis
Quinterno, Bruno F.
Quiroga, Pedro R.
Raimondi, Alejandro
Ramaccioni, Danilo
Ramallo, Carlos M.
Rathgeb, Alfonso
Ratto, Héctor R.
Raver, Ignacio
Re, Pedro M.
Rebuelto, Emilio
Reece, William Asher
Repetto, Blas Angel
Repossini, José
Rezzani, José María
Rissotto, Atilio A.
Rizzoli, Ricardo H.
Robles, Angel A.
Rodríguez Aravena, S.
Rodríguez, Miguel
Roffo, Angel H.
Roldán, Raimundo
Rokotnitz, Otto
Rosas, Agustín
Rosauer, Rodolfo E.
Rossell Soler, Pedro
Ruata, Luis E.
Ruíz Moreno, Adrián
Ruiz Moreno, Isidoro
Sabaria, Enrique
Salomón, Hugo
Sampietro, Adolfo D.
Sánchez Díaz, Abel
Sánchez, José Ricardo
Sánchez, Gregorio L.
Sanromán, Iberio
Santángelo, Rodolfo
Santos Rossell, Carlos
Saralegui, Antonio M.
Sarhy, Juan F.
Sarrabayrouse, Eugenio
Savon, ,Marcos A.
Schleich, Bernardo E.
Schnack, Benno J.
Schneider, Otto
Schulz, Guillermo
Selva, Domingo
Selzer, Samuel
Sesma, Angel
Sheahan, Juan F.
Simonoff, Miguel
Simons, Hellmut
Siri, Luis
Sirotzky, David
Sisto, Emilio E.
Sobral, Arturo
Solari, Emilio F.
Solari, Miguel A.
Somonte, Eduardo
Sordelli, Alfredo
Soler, Frank L.
Spinetto, David J.
Spota, Víctor J.
Stoop, Arnoldo
Storni, Segundo R.
Taiana, Alberto F.
Tarragona, José
Tello, Eugenio
Torre Bertucci, Pedro
Torello, Pablo
Tossini, Luis
Trelles, Rogelio A.
Trucco, Sixto E.
Turdera, Raúl D.
Valeiras, Antonio
Valentini, Argentino
Valentinuzzi, Máximo
Vallebella, ,Colón B.
Vallejo, Segundo E.
Vanossi, Reinaldo
Vaquer, Antonio
Varela Gil, José
Veyga, Francisco de
Vidal, Eduardo
Vignati, Milciades A.
Vignaux, Juan C.
Villalobos Domínguez Cándido
Vinardell, Alberto
Voilajuson, Julián
Volpatti, Eduardo
Volpi, Carlos A.
Wainer, Jacobo
Wunenburger, Gastón
Wauters, Carlos
Wernicke, Raúl
White, Guillermo J.
Wolff, Pablo Osvaldo
Yepes, José
Zamboni, Agustín
Zanetta, Alberto
Zappi, Enrique V.
Zuloaga, Angel M.

SOCIOS ADHERENTES

Bardin, Pedro P.
Bazzanella, José
Carrera, César J. M.
Cotlar, Mischa
Chiodin, Alfredo S.
Di Leo, Ernesto
Dupont, Benja
Elizondo, Francisco M.
Ferramola, Raúl
García, Eduardo D.
Gorchs, Agustín C.
Greenway, Daniel J.
Junqué Gassó, Alfredo R.
Krieger, Gordon C.
Laclau, Juan Pedro
Leiguarda, Ramón H.
Mailhos, Luis E.
Milesi, Emilio Angel
Molfino, Rubén H.
Monteverde, José J.
Noseda, Aldo F.
Peraldo, Leo
Podestá Aubone, Roberto
Recoder, Roberto F.
Repetto, Cayetano
Reynal, Jorge E.
Rusconi, Carlos
Sadosky, Manuel
Stacco, Alberto Carlos
Tortorelli, Lucas A.
Viticcioli, Fernando
Wechsler, Wolf

CASAS ADHERENTES

Angel Estrada y Cía.
Banda de Estribor
Benvenuto y Cía.
Caminos y Construcciones Argentinas - CYCA
Compañía General de Construcciones
De la Puente y Bustamante
D'Elia, Antonio
Establecimientos Industriales "Febo"
Italo Argentino Puricelli
Latham Urtubey, Agustín O.
Lutz, Ferrando y Cía.
Hijos de Atilio Massone
Otto Hess, S. A.
Peña, Guillermo A.
Jacobo Peuser, S. A. Ltda.
Polledo Hnos. y Cía.
Rezzani y Esperne
Rivara y Cía.
Siemens-Bauunion
S. A. Talleres Metalúrgicos San Martín «TAMET»
T. Gr. "Tomás Palumbo"
Wayss y Freytag

SOCIO VITALICIO

Huergo, Eduardo María

MIEMBROS PROTECTORES DE LA ORGANIZACION DIDACTICA DE BUENOS AIRES

Anchorena, Juan E.
Besio Moreno, Nicolás
Tornquist, E. y Cía. (Lda).

SECCION CORDOBA

COMISION DIRECTIVA

Presidente delegado, Dr. Juan Olsacher; Secretario, Prof. Tulio Mácola; Tesorero, Agr° Bernardo Pilotto.

SOCIOS ACTIVOS

Brandan, ,Ramón A.
Broglia, Alberto A.
Carlomagno, José
Chaudet, Enrique
Deheza, Eduardo
Esteban, Fernando
Fernández, Miguel
Fontana, Lorenzo F.

Godoy, Salvador A.
Hosseus, Carlos Curt
Mácola, Berardo A.
Mácola, Tulio
Mirizzi, Pablo Luis

Olaf Lützow, Holm
Olsacher, Juan
Padula, Federico
Pasqualini, Clodoveo

Peláez, J. Gambastiani de
Pilotto, Bernardo
Ponce Laforgue, Carlos

Rothlin, Edwin
Vercello, Carlos
Yadarola, Mauricio L.
Zimmer, Meade L.

SECCION SANTA FE

COMISION DIRECTIVA

Presidente, Ingº Quím. Guillermo Berráz; Vice-presidente, Ingº Agrº Bruno Santini; Secretario de actas, Ingº Quím. Oscar Mallea; Secretario de correspondencia, Per. Quím. Víctor S. Nicollier; Tesorero, Ingº Quím. Rafael O. Méndez; Vocales titulares: Prof. Rolando Hereñu e Ingº Agrº Arturo E. Ragonese; Vocales suplentes: Ingº Civ. Francisco E. Urondo e Ingº Quím. José Salgado; Encargado de Publicaciones, Ingº Civ. José Babini; Encargado de Biblioteca y Canje, Ingº Quím. Rodolfo Rouzaut.

SOCIOS ACTIVOS

Anadón, Leónidas
Ariotti, Juan Carlos
Babini, José
Berraz, Guillermo
Bertuzzi, Francisco A.
Bossi, Celestino
Cerana, Miguel
Claus, Guillermo
Cohan, Marcos
Costa Comas, Ignacio M.
Courault, Pablo
Crouzeilles, A. L. de
Cruellas, José
Christen, Carlos
Christen, Rodolfo G.

Fester, Gustavo A.
Giscafre, Lorenzo
Gollán, Josué (h.)
González G., Wenceslao
Hereñú, ,Rolando
Hotschewer, Curto
Juliá, Tolrá Antonio
Kleer, Gregorio
Lachaga, Dámaso A.
Lexow, Siegfried G.
Mai, Carlos
Mallea, Oscar S.
Mántaras, Fernando
Martino, Antonio E.

Méndez, Rafael O.
Minervini, José
Montpellier, Luis Marcos
Mounier, Celestino
Muzzio, Enrique
Nicollier, Víctor S.
Nigro, Angel
Niklison, Carlos A.
Oliva, José
Peresutti, Luis
Piazza, José
Piñero, Rodolfo
Pozzo, Hiram J.

Puente, Nemesio G. de la
Ragonese, Arturo E.
Reinares, Sergio
Rouzaut, Rodolfo
Salaber, Julio
Salgado, José
Santini, Bruno L. P.
Schivazappa, Mario
Simonutti, Atilio A.
Tissembaum, Mariano
Urondo, Francisco E.
Vergara, Emilio A.
Virasoro, Enrique
Zárate, Carlos C.

SECCION MENDOZA

COMISION DIRECTIVA

Presidente, Dr. Eduardo Carette; Vice-Presidente, Ingº Cayetano C. Piccione; Secretario, Sr. Adrián Ruíz Leal; Tesorero, Sr. Manuel Tellechea; Bibliotecario, — —
Vocales: Dr. Juan B. Lara; Ingº Juan P. Toso; Sr. Ranulfo Rosales; Dr. Juan P. Paganotto; Dr. Mario Bidone.

SOCIOS ACTIVOS

Ayala Castagnino, G.
Bacal, Benjamín
Bauzá, Juan
Benegas, Raúl
Bidone, Mario
Borsani, Carlos Pablo
Burgoa, Pedro A.
Carette, Eduardo

Casale, Florencio B.
Ceresa, Mario Carlos D.
Christensen, Jorge R.
Croce, Francisco M.
Dodds, Leonel
Gamba, Otto
Gomensoro, José N.
González, Joaquín R.

Jofré, Alberto L.
Lara, Juan B.
Lombardozzi, Vicente P.
Minoprio, José D. J.
Paganotto, Juan P.
Patiño, Roberto V.
Piccione, Cayetano C.
Ponce, José Raúl

Rosales, Ranulfo S.
Ruíz Leal, Adrian
Sáez Medina, Miguel
Serra, Luis Angel
Silvestre, Tomás
Suárez, Jorge Carlos
Tellechea, Manuel
Toso, Juan P.

SECCION LA PLATA

COMISION DIRECTIVA

Presidente, Dr. Emiliano J. Mac Donagh; Secretario, Dra. Juana Cortelezzi; Tesorero, Dr. Tomás C. Pera; Vocales: Dr. Ernesto Sabato, Dr. Danilo Vucetich, Ingº Fernando Lizarán, Ingº Emilio J. Ringuelet.

SOCIOS ACTIVOS

Alsina Fuertes, Fidel
Angli, Jerónimo

Arroyo Basaldúa, Víctor M.

Brau, Eduardo F.
Burgueño, José Luis

Coria, Pedro E.
Cortelezzi, Juana

Crespi Gherzi, Roberto A.
Christmann, Federico E.
Gascón, Jorge
Gershánik, Simón
Giovambattista, Humberto
Inda, Carmen
Landolfi, José María
Lindquist, Juan Carlos
Lizarán, Fernando
Loedel Palumbo, Enrique
Mac Donagh, Emiliano J.
Madrid, Diógenes
Magliano, Hilario
Márquez, Aníbal R.
Marmonti, Angel
Massimino, Blas
Méndez, José D.
Mignanego, Alberto Armando
Nico, Raúl
Oliva, Virgilio
Paternosto, Pedro G.
Pera, Tomás Carlos
Platzceck, Ricardo P.
Rigamonti, Esteban F.
Ringuelet, Emilo J.
Romano Yalour, JuanG.
Sabato, Ernesto R.
Sabato, Juan
Sáez, Francisco A.
Sagastume, Carlos A.
Sagastume Berra, A. E.
Scheggia, Eduardo R.
Teobaldo, Carlos
Trejo, César A.
Ucha Udabe, Manuel
Vucetich, Danilo C.
Wilkens, Alejandro

SECCION TUCUMAN

COMISION DIRECTIVA

Presidente, Ingº Arturo M. Guzmán; Secretario, Dr. Luis N. Pizzorno; Tesorero, Dr. Raúl J. Blaisten; Vocales: Prof. Juan F. de Lázaro, Dr. Alejandro Terracini, Dr. Rafael Sorol, Prof. Clemente H. Balmori.

SOCIOS ACTIVOS

Altieri, Radamés A.
Balmori, Clemente H.
Benvenuto, Terracini, Aron
Blaisten, Raúl J.
Boggiatto, Dante E.
Cecilio, Armando
Cernuschi, Félix
Cetrángolo, Guillermo
Conceiçao de la Cruz, Alfonso
Cross, William E.
Cuenya, Carlos (h.)
Descole, Horacio R.
Deza Cenget, Dacio
Escalante, Dardo A.
Fontana, Iván R.
Freiberg, Salomón
Fonio, Osvaldo A.
Frondizi, Risieri
Greve, Walther
Guzmán, Arturo M.
Herrera, Félix E.
Ibáñez, Adolfo P.
Jung, Walter
Lázaro, Juan F. de
Lebrón, Enrique Juan
Manoff, Isaac
Nanni, Luis Fernando
Novillo, Napoleón R.
Peirano, Abel A.
Peña Guzmán, Solano
Pepe, O. Rodolfo
Pizzorno, Luis N.
Robín, Maximiliano V.
Rodríguez Marquina, Elio
Rohmeder, Guillermo
Saleme, Ernesto M.
Sánchez Reulet, Aníbal
Santillán, Luis A.
Santillán, Prudencio
Schegg, Alfredo
Silvetti, Luis María
Soria Bravo, Custodio
Sorol, Rafael V.
Storni, Julio S.
Terracini, Alejandro
Treves, Renato
Ubaldini, Alejandro S.
Verna, Luis C.
Victoria, Virgilio A.
Viola, Eugenio F.
Würschmidt, José

SOCIOS CORRESPONDIENTES

Aguilar y Santillán, R.	México
Alvarez, Antenor	Sgo. del Estero
Amaral, Afranio de	San Pablo (Br.)
Avendaño, Leónidas	Lima
Bachmann, Carlos J.	Lima
Birkhoff, Jorge D.	New York
Bolívar, Ignacio	Madrid
Bonarelli, Guido	Gubbio (It.)
Borel, Emile	París
Bruch, Carlos	Olivos (Bs. As.)
Cabrera, Blás	Madrid
Campos Porto, Pablo	Río de Janeiro
Carabajal, Melitón M.	Lima
Chester Bradley, J.	Ithaca, N. Y.
Darmois, Eugenio	Nancy (Fr.)
Darmois, Georges	París
Dávila, Rubén	Santiago (Ch.)
Escomel, Edmundo	Lima
Fiebrig, Carlos	Munich (Al.)
Fontecilla Larrain, Arturo...	Santiago (Ch.)
Fort, Michel	Lima
García Godofredo	Lima
González del Riego, Felipe ..	Lima
Goodspeed, Thomas H.	Berkeley, Cali.
Greve, Germán	Santiago (Ch.)
Guinier, Philibert	Nancy (Fr.)
Hadamard, Jacques	París
Hauman, Luciano	Bruselas
Hernández, Juvenal	Santiago (Ch.)
Hijar y Haro, Luis	México
Janet, Pierre	París
Jiménez de Asúa, Luis	Madrid
Keiper, Guillermo	Berlín
Langevin, Paul	París
Levi Peppo	Rosario
Lobo, Bruno	Río de Janeiro
Mardones, Francisco	Santiago (Ch.)
Molina, Enrique	Concep. (Ch.)
Monjaráz, Jesús E.	México
Montel, Paul	París
Moretti, Gaetano	Milán
Oliver Schneider, Carlos	Concep. (Ch.)
Pereira d'Andrade, Lencastre	Nova Goa (I. P.)
Perrin, Tomás G.	México
Perrine, Carlos D.	Córdoba
Pi y Suñer, Augusto	Barcelona
Porter, Carlos E.	Santiago (Ch.)
Reyes Cox, Eduardo	Santiago (Ch.)
Rosenblatt, Alfred	Lima
Rowe, Leo S.	Wáshington
Tello, Julio C.	Lima
Terracini, Alejandro	Tucumán
Valle, Rafael H.	México
Vélez, Daniel M.	México
Villarán, Manuel V.	Lima
Vitoria, Eduardo	Barcelona